Université Claude Bernard - Lyon 1
Master général 1ère année
Semestre de printemps 2019-2020

Anneaux et corps commutatifs : présentation

Ce cours est constitué de deux parties : une partie sur la théorie de Galois (qui va occuper environ 2/3 du temps) et une autre partie sur la géométrie algébrique (qui occupera le tiers restant).

1 Sur la théorie de Galois

On considère l'équation polynomiale de degré 2 bien connue : $aX^2+bX+c=0$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ par exemple. On sait que les solutions s'écrivent ainsi : $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Ici $\sqrt{\cdot}$ signifie la racine carrée ou bien une racine carré (si le nombre en question n'est pas positif).
On constate que les solutions s'obtiennent à partir des coefficients de l'équation et d'opérations élémentaires ($+$, $-$, $\times$ et $\div$) ainsi qu'une extraction de racine carrée.
On peut se demander si cette constatation se généralise pour les équations de degré plus grand que 2. Cette question a occupé les mathématiciens pendant plusieurs siècles (Euler, Lagrange et Gauss y ont contribué). Ils sont arrivés à démontrer qu'en degrés 3 et 4, on avait un résultat similaire : les racines s'expriment à l'aide des coefficients, des quatre opérations élémentaires et d'extractions de racines carrés, cubiques, etc. On dit d'une telle équation qu'elle est résoluble par radicaux. Pendant longtemps, les équations de degré 5 et plus ont gardé leur secret.
La réponse arrive finalement au début du 19ième siècle avec deux contributions indépendantes. Abel (1802-1829) a repondu par la négative en exhibant un contre-exemple et Galois (1811-1832) a été plus loin.
Galois construit un groupe (qu'on appelle groupe de Galois) associé aux coefficients de l'équation, il établit un lien entre ce groupe et le caractère résoluble de l'équation.
Dans ce cours, on parlera beaucoup de corps, d'anneaux, de morphismes de corps, de groupes.
Les prérequis sont donc l'algèbre de base du L3 et le cours d'algèbre obligatoire du M1.

2 Sur la géométrie algébrique

Il s'agit d'un cours de base de géométrie algébrique avec en plus une partie constructive sur les bases de Gröbner.
Considérons l'ensemble $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1 \text{ et } z=1/2\}$. Il s'agit de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ coupée par un plan ce qui donne un cercle.
On peut voir A de la façon suivante. On considère les polynômes $f_1=x^2+y^2+z^2-1$ et $f_2=z-1/2$ dans $\mathbb{R}[x,y,z]$ et on voit A comme le lieu des zéros de ces polynômes.
On peut aussi considérer l'idéal I de $\mathbb{R}[x,y,z]$ engendré par f_1 et f_2 et voir A comme le lieu des zéros des éléments de I. Un tel ensemble A est appelé un ensemble algébrique affine.
Un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ est un exemple d'ensemble algébrique affine.
A l'inverse, si on se donne un ensemble algébrique affine $A\subset\mathbb{R}^3$ on peut considérer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[x,y,z]$ qui s'annulent sur A. Cet ensemble est alors un idéal.
On obtient ainsi un passage entre les ensembles algébriques affines et les idéaux. On va étudier ces objets et ce lien entre algèbre et géométrie.
Dans ce cours, on va parler de polynômes, d'idéaux, d'anneaux, de topologie également.
Les prérequis sont assez peu importants : l'algèbre de base de licence.