Fiche de TD no 2

Exercice 1. Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ une extension algébrique. Montrer que tout élément algébrique sur L est aussi algébrique sur K.

Exercice 2. Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ et $a, b \in \mathbb{L}$ deux éléments algébriques sur $\mathbb{K}$ de degré k et n.
Montrer que le degré de $\mathbb{K}[a, b]$ sur $\mathbb{K}$ est multiple de $\operatorname{ppcm}(k, n)$ et ne dépasse pas kn.

Exercice 3. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}[\sqrt{a}, \sqrt{b}] \supset \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{a}, \sqrt{b}] = \mathbb{Q}[\sqrt{a} + \sqrt{b}]$ (sauf si $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0$).

Exercice 4. Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $\omega^3 = 1$.

1. Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}[2^{1/3}] \supset \mathbb{Q}$.
2. Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}[\omega] \supset \mathbb{Q}$.
3. Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}[2^{1/3}, \omega] \supset \mathbb{Q}$.
4. Déterminer les automorphismes de $\mathbb{Q}[2^{1/3}]$.
5. Déterminer les automorphismes de $\mathbb{Q}[\omega]$.
6. Déterminer les automorphismes de $\mathbb{Q}[2^{1/3}, \omega]$.

Exercice 5. Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{C}$; on note $n = [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré k et a une racine de P dans $\mathbb{C}$. Montrer que

1. P est irréductible sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $[\mathbb{K}[a] : \mathbb{K}] = k$.
2. P est irréductible sur $\mathbb{L}$ si et seulement si $[\mathbb{L}[a] : \mathbb{K}] = kn$.
3. Dans cette question, on suppose P est irréductible sur $\mathbb{K}$ et $\operatorname{pgcd}(k, n) = 1$.
   Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{L}$.
   Que vaut dans ce cas $\mathbb{K}[a] \cap \mathbb{L}$?
4. Soit $d = \operatorname{pgcd}(k, n)$. Montrer que le degré de tout facteur irréductible de P sur $\mathbb{L}$ est multiple de k/d.

Exercice 6. Soient $\mathbb{K}, \mathbb{L}, \mathbb{M}$ des sous-corps de $\mathbb{Q}$ tels que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ et $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}$.
Notons $l = [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$, $m = [\mathbb{M} : \mathbb{K}]$, $n = [\mathbb{L}\mathbb{M} : \mathbb{K}]$.

1. Montrer que n est fini si et seulement si l et m son finis. Dans ce cas n est un multiple de l et m, et on a $n \leq lm$.
2. Montrer que si $\mathrm{pgcd}(l, m) = 1$ alors $n = lm$. (La réciproque est fausse.)
3. Montrer que si $n = lm$, alors $L \cap M = K$.
   Montrer que la réciproque est fausse (exemple avec $l = m = 3$).

Exercice 7 (Nombres constructibles)**.** Un point du plan euclidien est dit constructible s'il peut être obtenu à l'aide d'une règle (non graduée) et d'un compas en un nombre fini d'étapes à partir des points $(0, 0)$ et $(0, 1)$. Un nombre complexe $z = x + iy$ est constructible si le point (x, y) l'est. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des nombres (complexes) constructibles. On admet le théorème suivant.
Theorème (Wantzel, 1837). Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $z \in \mathcal{C}$ si et seulement s'il existe une tour d'extensions $\mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{L}_n$ telle que $\mathbb{L}_0 = \mathbb{Q}$, $\forall i$, $[\mathbb{L}_{i+1} : \mathbb{L}_i] = 2$ et $z \in \mathbb{L}_n$.

1. Montrer que le degré du polynôme minimal de tout nombre constructible est une puissance de 2.
2. Montrer l'impossibilité de la duplication du cube.
3. L'impossibilité de la trisection de l'angle : on veut montrer que l'angle $\pi/3$ n'est pas trisectable.
   Pour cela vérifier la formule $\cos(3\phi) = 4\cos(\phi) - 3\cos(\phi)$.
   Montrer que $\cos(\pi/9)$ n'est pas constructible.
4. Soient $a, b \in \mathcal{C}$. Montrer que $\mathbb{Q}[a, b] \subset \mathcal{C}$. En déduire que que $\mathcal{C}$ est un corps (sous-corps de $\mathbb{C}$).
5. Soit $\mathbb{K} \subset \mathcal{C}$ une extension finie de $\mathbb{Q}$. Montrer que le degré de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{Q}$ est une puissance de 2.
6. Soit z un nombre constructible de polynôme minimal $P \in \mathbb{Q}[X]$.
   Montrer que toutes les racines complexes de P sont constructibles.
   En déduire que le degré du corps de décomposition de P est une puissance de 2.
   Attention : il y a des nombres algébriques non-constructibles dont le degré est une puissance de 2.
   Exemple : les racines du polynôme $X^4 - X - 1$.