Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020

MG1 - Algèbre commutative

Fiche de TD no 6

Exercice 1. Pour chaque $P(X)$ ci-dessous, dire si $P(X)$ est résoluble par radicaux sur $\mathbb{Q}$.

1. $P(X) = X^5 - 2$.
2. $P(X) = X^5 + 2X^3 - 8X + 2$.
3. $P(X) = X^6 - 6X^3 + 7$.

Exercice 2. Pour chacun des polynômes $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ci-dessous, déterminer le groupe de Galois puis déterminer explicitement une chaine d'extensions prouvant que $P(x)$ est résoluble par radicaux.

1. $P(X) = X^3 - 5X + 7$.
2. $P(X) = X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 6X - 15$.

Exercice 3 (S_p comme groupe de Galois.)**.**

1. Soit p premier. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible de degré p. Montrer que le groupe de Galois G de $P(X)$ sur $\mathbb{Q}$ contient une permutation d'ordre p et que c'est un cycle de longueur p.
2. On suppose de plus que $P(X)$ a exactement $p-2$ racines réelles. Montrer que G contient une transposition et conclure que $G = S_p$.
3. Montrer que le groupe de Galois du polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ suivant est S_p :
$$P(X) = X^p + 6^p p^3 X(X-1)(X-2)\cdots(X-p+3) - 2.$$
4. Soit G un groupe fini. Montrer qu'il existe des extensions finies $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ telles que $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}) \simeq G$.

Remarque : Soit $n \geq 2$ un entier. On peut montrer (ce n'est pas trivial) que le groupe de Galois de $X^n - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ est S_n.

Exercice 4. On admet le résultat suivant (Galois) :
Soit p premier. Un sous-groupe transitif G de S_p est résoluble si et seulement si la seule permutation de G ayant (au moins) deux points fixes est l'identité.
Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, $P(X)$ un polynôme irréductible de degré premier $p \geq 5$ de $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{L}$ le corps de décomposition de $P(X)$ sur $\mathbb{K}$.

1. Montrer que P est résoluble par radicaux si et seulement si $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\alpha, \beta]$ pour tout couple de racines distinctes α, β de $P(X)$.
2. Questions supplémentaires.
   (a) Supposons que $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\alpha]$. Pourquoi P est-il résoluble ?
   (b) Que peut-on dire du degré $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$?
   (c) La partie "seulement si" de la question 2 est-elle toujours vraie si $\deg(P) = 4$?