Ex2 (Fiche 6)

1) $P = X^3 - 5X + 7$

$P' = 3X^2 - 5$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5/3}$		$\sqrt{5/3}$		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$\simeq 2{,}7$	$\nearrow$	$+\infty$

Le tableau montre qu'on a une unique racine réelle et donc les deux autres sont complexes conjuguées (non réelles).

Par le lemme 3.34 du CM, Gal(P) contient un 3-cycle.

De plus la conjugaison complexe appartient à Gal(P) ie Gal(P) contient une transposition. Par le lemme 3.35, $\mathrm{Gal}(P) \simeq S_3$.

On va appliquer la méthode de Cardan pour trouver les racines.

On cherche les racines sous la forme $X = y + z$

On reporte dans P et on obtient :

$$y^3 + z^3 + (y+z)(3yz - 5) + 7 = 0$$

On cherche y, z tq $yz = \frac{5}{3}$ et donc $y^3 z^3 = \frac{125}{27}$ et $y^3 + z^3 = -7$

Ainsi y^3 et z^3 sont solutions de : $T^2 + 7T - \frac{125}{27} = 0$

dont le discriminant est $\Delta = 49 - 4\frac{125}{27} = \frac{823}{27}$

Ainsi y^3, z^3 sont $\frac{1}{2}\left(-7 \pm \frac{\sqrt{823}}{3\sqrt{3}}\right)$.

si α est une racine cubique de $\frac{1}{2}\left(-7 + \frac{\sqrt{823}}{3\sqrt{3}}\right)$ alors en posant $\beta = \frac{5}{3\alpha}$ on aura les racines suivantes de P :

$x_1 = \alpha + \beta$, $x_2 = j\alpha + j^2\beta$, $x_3 = j^2\alpha + j\beta$. où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

On considère alors les extensions suivantes :

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(j) \subseteq \mathbb{K}_2 = \mathbb{Q}(j)\left(\sqrt{\frac{823}{3}}\right).$$

On a alors : P est scindé dans $\mathbb{K}_2$.

La suite d'extensions est par radicaux donc P est bien résoluble par radicaux.

Ex 2 (TD 6)

2) $P = X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 6X - 15$

On cherche les facteurs irréductibles :

$(X^2+aX+b)(X^2+cX+d) = X^4 + (a+c)X^3 + (b+d)X^2 + (ad+bc)X + bd =: Q$

$P = Q \Rightarrow b$ et d sont racines de $T^2 + 2T - 15 = 0$ dont les racines sont -5 et 3 (en effet $b+d = -2$ et $bd = -15$)

On pose par exemple $b = 3$ et $d = -5$ ce qui donne $\begin{cases} a+c = 2 \\ -5a+3c = 6 \end{cases}$ qu'on résout et on obtient $a = 0$ et $c = 3$. Ainsi :

$P = (X^2+3)(X^2+2X-5)$ (On développe pour vérifier les valeurs trouvées car on a procédé par implication)

Arrivés à ce stade on obtient facilement les racines de P, ce sont : $i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, -1+\sqrt{6}, -1-\sqrt{6}$.

On a alors la suite d'extensions :

ou $\sqrt{2}$ car $\sqrt{6} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(i\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{K}_2 = \mathbb{Q}(i\sqrt{3})(\sqrt{6})$

L'extension $\mathbb{K}_2/\mathbb{Q}$ est bien par radicaux et P est scindé dans $\mathbb{K}_2$ donc P est résoluble par radicaux.

Déterminons le groupe de Galois de P.

Notons $\alpha_1 = i\sqrt{3}$, $\alpha_2 = -i\sqrt{3}$, $\alpha_3 = -1+\sqrt{6}$ et $\alpha_4 = -1-\sqrt{6}$

L'extension $\mathbb{K}_2/\mathbb{Q}$ est degré 4 donc $Gal(P)$ est d'ordre 4

α_1 et α_3 sont conjugués sur $\mathbb{Q}$ (au sens de la déf. 3.26)

Donc par le lemme 3.25 $\exists \sigma \in Aut_{\mathbb{Q}}(\overline{\mathbb{Q}})$ tq $\sigma(\alpha_1) = \alpha_2$.

Comme α_3 et α_4 sont aussi conjugués sur $\mathbb{Q}$, $\sigma(\alpha_3) = \alpha_3$ ou $\sigma(\alpha_3) = \alpha_4$.

Supposons que $\sigma(\alpha_3) = \alpha_4$ (et donc $\sigma(\alpha_4) = \alpha_3$)

Comme $Gal(P)$ est de cardinal 4, $\exists \tau \in Gal(P)$ tq $\tau \neq \sigma$

On sait $\tau(\alpha_1) \in \{\alpha_1, \alpha_2\}$ et $\tau(\alpha_3) \in \{\alpha_3, \alpha_4\}$.

Comme $\tau \neq \sigma$, $(\tau(\alpha_1) = \alpha_1$ et $\tau(\alpha_3) = \alpha_4)$ ou $(\tau(\alpha_1) = \alpha_2$ et $\tau(\alpha_3) = \alpha_3)$

Dans les 2 cas la composée de τ et σ va produire un élément de $Gal(P)$ qui va fixer $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ et échanger α_3 et α_4 ou le contraire.

Finalement $Gal(P)$ (vu dans S_4) est égal à $\{Id, (1\,2), (3\,4), (1\,2)(3\,4)\}$

ie $Gal(P) = \langle (1\,2), (3\,4) \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$