Ex 4 (TD 6).

1) On suppose P résoluble par radicaux.

Soient α, β deux racines distinctes de P. But $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha, \beta)$.

Montrons que $Gal(\mathbb{L} / \mathbb{K}(\alpha,\beta)) = \{Id\}$.

Soit $\sigma \in Gal(\mathbb{L} / \mathbb{K}(\alpha,\beta))$ ie $\sigma \in Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ et $\sigma(\alpha) = \alpha$ et $\sigma(\beta) = \beta$.

Rappelons que $Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ est transitif car P est irréductible (ex. 3.32 du CR). Par le résultat de Galois, $\sigma = Id$.

On a bien $Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K}(\alpha,\beta)) = \{Id\}$. Par la correspondance de Galois (Th. 3.60) $\mathbb{K}(\alpha,\beta) = \mathbb{L}$.

Voyons la réciproque. On veut montrer que $Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ est résoluble (sachant qu'il est transitif comme on l'a rappelé).

Soit donc $\sigma \in Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ ayant (au moins) deux points fixes. Ainsi $\exists \alpha, \beta$ racines de P tq $\sigma(\alpha) = \alpha$ et $\sigma(\beta) = \beta$. L'hypothèse implique : $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha, \beta)$.

Ainsi σ fixe $\mathbb{K}$, α et β et donc $\mathbb{L}$ ie $\sigma = Id$. On conclut avec le résultat de Galois.

2)(a) L'énoncé n'est pas clair mais je suppose que α est une racine de P.

. Si P a une autre racine β alors $\mathbb{K}(\alpha) \subseteq \mathbb{K}(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{L}$. L'égalité $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$ implique $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha,\beta)$ et on utilise la question 1 pour conclure.

. Supposons que α est l'unique racine de P. Alors $P = c(X-\alpha)^p$ avec $c \in \mathbb{K}$.

Mais alors : $P = cX^p - cp\alpha X^{p-1} + \cdots$ ce qui implique $\alpha \in \mathbb{K}$ et donc $\mathbb{L} = \mathbb{K}$ et P est résoluble par radicaux.

(b). si $\alpha \in \mathbb{K}$ alors $\mathbb{L} = \mathbb{K}$ et $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 1$

. Sinon : le polyn. minimal de α divise P qui est irréductible, c'est donc P. Dans ce cas, $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = \deg P = p$.

(c) Soit $P = X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

Ici $P = (X^2 - \sqrt{2})(X^2 + \sqrt{2}) = (X - \sqrt[4]{2})(X + \sqrt[4]{2})(X - i\sqrt[4]{2})(X + i\sqrt[4]{2})$.

On voit facilement que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Soient $\alpha = \sqrt[4]{2}$ et $\beta = -\sqrt[4]{2}$. Notons $\mathbb{L} = Gal(P)$.

On n'a pas : $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ car $\mathbb{Q}(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}$ et $i\sqrt[4]{2} \notin \mathbb{R}$.

De plus P est résoluble par radicaux car on a :

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(i) \subseteq \mathbb{Q}(i)(\sqrt[4]{2})$ est une extension par radicaux.