Réécrire dans les algèbres diagrammatiques

Benjamin Dupont

Institut Camille Jordan, Université Lyon 1

Journée Équipe AGL

Lyon, 17 janvier 2019

Plan

I. La réécriture

La réécriture en algèbre

- La réécriture est une théorie combinatoire des classes d'équivalence.
  - Consiste à orienter les équations.

La réécriture en algèbre

- La réécriture est une théorie combinatoire des classes d'équivalence.
  - Consiste à orienter les équations.
  - Thue '14: réécriture dans les semi-groupes.

La réécriture en algèbre

- La réécriture est une théorie combinatoire des classes d'équivalence.
  - Consiste à orienter les équations.
  - Thue '14: réécriture dans les semi-groupes.
  - Church-Rosser '36: lambda-calcul et beta-réductions.

La réécriture en algèbre

- La réécriture est une théorie combinatoire des classes d'équivalence.
  - Consiste à orienter les équations.
  - Thue '14: réécriture dans les semi-groupes.
  - Church-Rosser '36: lambda-calcul et beta-réductions.
  - Newman '42: réécriture abstraite.

La réécriture en algèbre

- La réécriture est une théorie combinatoire des classes d'équivalence.
  - Consiste à orienter les équations.
  - Thue '14: réécriture dans les semi-groupes.
  - Church-Rosser '36: lambda-calcul et beta-réductions.
  - Newman '42: réécriture abstraite.
  - Knuth-Bendix '70, Nivat '72: procédures de complétion, caractérisation de la confluence locale en fonction des chevauchements de réductions.

La réécriture en algèbre

- La réécriture est une théorie combinatoire des classes d'équivalence.
  - Consiste à orienter les équations.
  - Thue '14: réécriture dans les semi-groupes.
  - Church-Rosser '36: lambda-calcul et beta-réductions.
  - Newman '42: réécriture abstraite.
  - Knuth-Bendix '70, Nivat '72: procédures de complétion, caractérisation de la confluence locale en fonction des chevauchements de réductions.
- Réécriture algébrique: déduire des propriétés d'une structure algébrique présentée par générateurs et relations.

La réécriture en algèbre

- La réécriture est une théorie combinatoire des classes d'équivalence.
  - Consiste à orienter les équations.
  - Thue '14: réécriture dans les semi-groupes.
  - Church-Rosser '36: lambda-calcul et beta-réductions.
  - Newman '42: réécriture abstraite.
  - Knuth-Bendix '70, Nivat '72: procédures de complétion, caractérisation de la confluence locale en fonction des chevauchements de réductions.
- Réécriture algébrique: déduire des propriétés d'une structure algébrique présentée par générateurs et relations.
  - Calcul de syzygies, i.e. relations entre les relations.

La réécriture en algèbre

- La réécriture est une théorie combinatoire des classes d'équivalence.
  - Consiste à orienter les équations.
  - Thue '14: réécriture dans les semi-groupes.
  - Church-Rosser '36: lambda-calcul et beta-réductions.
  - Newman '42: réécriture abstraite.
  - Knuth-Bendix '70, Nivat '72: procédures de complétion, caractérisation de la confluence locale en fonction des chevauchements de réductions.
- Réécriture algébrique: déduire des propriétés d'une structure algébrique présentée par générateurs et relations.
  - Calcul de syzygies, i.e. relations entre les relations.
  - Calcul de bases pour des algèbres.

La réécriture en algèbre

- La réécriture est une théorie combinatoire des classes d'équivalence.
  - Consiste à orienter les équations.
  - Thue '14: réécriture dans les semi-groupes.
  - Church-Rosser '36: lambda-calcul et beta-réductions.
  - Newman '42: réécriture abstraite.
  - Knuth-Bendix '70, Nivat '72: procédures de complétion, caractérisation de la confluence locale en fonction des chevauchements de réductions.
- Réécriture algébrique: déduire des propriétés d'une structure algébrique présentée par générateurs et relations.
  - Calcul de syzygies, i.e. relations entre les relations.
  - Calcul de bases pour des algèbres.
  - Confluence et Koszulité, Berger '98.

La réécriture en algèbre

- La réécriture est une théorie combinatoire des classes d'équivalence.
  - Consiste à orienter les équations.
  - Thue '14: réécriture dans les semi-groupes.
  - Church-Rosser '36: lambda-calcul et beta-réductions.
  - Newman '42: réécriture abstraite.
  - Knuth-Bendix '70, Nivat '72: procédures de complétion, caractérisation de la confluence locale en fonction des chevauchements de réductions.
- Réécriture algébrique: déduire des propriétés d'une structure algébrique présentée par générateurs et relations.
  - Calcul de syzygies, i.e. relations entre les relations.
  - Calcul de bases pour des algèbres.
  - Confluence et Koszulité, Berger '98.
  - Calcul de résolutions libres, de remplacements cofibrants, Anick '84.

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc, \;\; ada \Rightarrow dc, \;\; bc \Rightarrow dab, \;\; db \Rightarrow c, \;\; dcb \Rightarrow acc.$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc, \; ada \Rightarrow dc, \; bc \Rightarrow dab, \; db \Rightarrow c, \; dcb \Rightarrow acc.$$

$$abc$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ ada \Rightarrow dc,\ \ bc \Rightarrow dab,\ \ db \Rightarrow c,\ \ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & abc \arrow[dl, Rightarrow] \\
bcc &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ \ ada \Rightarrow dc,\ \ \ bc \Rightarrow dab, db \Rightarrow c,\ \ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
bcc & & adab
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ \ ada \Rightarrow dc,\ \ \ bc \Rightarrow dab, db \Rightarrow c,\ \ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
& abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \\
dabc & &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ \ ada \Rightarrow dc,\ \ bc \Rightarrow dab,\ \ db \Rightarrow c,\ \ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \\
dabc & &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ ada \Rightarrow dc,\ \ bc \Rightarrow dab,\ \ db \Rightarrow c,\ \ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \\
dabc \arrow[d, Rightarrow] & & \\
dbcc & &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ ada \Rightarrow dc,\ bc \Rightarrow dab,\ db \Rightarrow c,\ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \\
dabc \arrow[d, Rightarrow] & & \\
dbcc & &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ \ ada \Rightarrow dc,\ \ \ bc \Rightarrow dab, db \Rightarrow c,\ \ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \\
 & dabc \arrow[d, Rightarrow] & & \\
 & dbcc \arrow[dl, Rightarrow] & & \\
ddabc & & &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ \ ada \Rightarrow dc,\ \ bc \Rightarrow dab,\ \ \ db \Rightarrow c, dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \\
 & dabc \arrow[d, Rightarrow] & & \\
 & dbcc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
ddabc & & ccc &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ \ ada \Rightarrow dc,\ \ bc \Rightarrow dab,\ \ db \Rightarrow c,\ \ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \\
 & dabc \arrow[d, Rightarrow] & & \\
 & dbcc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
ddabc & & ccc &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ \ ada \Rightarrow dc,\ \ bc \Rightarrow dab,\ \ db \Rightarrow c,\ \ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \\
 & dabc \arrow[d, Rightarrow] & & \\
 & dbcc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
ddabc \arrow[d, Rightarrow] & & ccc & \\
\cdots & & &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc, \quad ada \Rightarrow dc, bc \Rightarrow dab, \; db \Rightarrow c, \; dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & dabc \arrow[d, Rightarrow] & dcb & \\
 & dbcc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
ddabc \arrow[d, Rightarrow] & & ccc & \\
\ldots & & &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ ada \Rightarrow dc,\ \ bc \Rightarrow dab,\ \ db \Rightarrow c,\ \ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
 & bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & dabc \arrow[d, Rightarrow] & dcb & & adbc \\
 & dbcc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
ddabc \arrow[d, Rightarrow] & & ccc & & \\
\cdots & & & &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

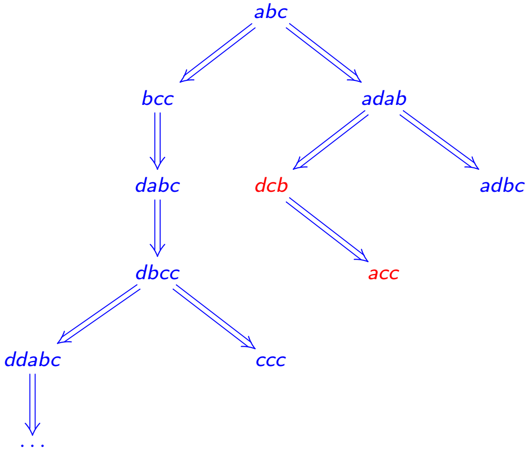
$$ab \Rightarrow bc,\ ada \Rightarrow dc,\ bc \Rightarrow dab,\ db \Rightarrow c,\ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
 & bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & dabc \arrow[d, Rightarrow] & dcb & & adbc \\
 & dbcc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
ddabc \arrow[d, Rightarrow] & & ccc & & \\
\cdots & & & &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc, \;\; ada \Rightarrow dc, \;\; bc \Rightarrow dab, \;\; db \Rightarrow c, \quad dcb \Rightarrow acc.$$



Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ ada \Rightarrow dc,\ bc \Rightarrow dab,\ db \Rightarrow c,\ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
 & bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & dabc \arrow[d, Rightarrow] & dcb \arrow[dr, Rightarrow] & & adbc \\
 & dbcc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & acc & \\
ddabc \arrow[d, Rightarrow] & & ccc & & \\
\ldots & & & &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ \ ada \Rightarrow dc,\ \ bc \Rightarrow dab,\ \ \ db \Rightarrow c, dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
 & bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & dabc \arrow[d, Rightarrow] & dcb \arrow[dr, Rightarrow] & & adbc \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & dbcc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & acc & \\
ddabc \arrow[d, Rightarrow] & & ccc & & \\
\ldots & & & &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ ada \Rightarrow dc,\ bc \Rightarrow dab,\ db \Rightarrow c,\ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
 & bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & dabc \arrow[d, Rightarrow] & dcb \arrow[dr, Rightarrow] & & adbc \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & dbcc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & acc & \\
ddabc \arrow[d, Rightarrow] & & ccc & & \\
\cdots & & & &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ \ ada \Rightarrow dc,\ \ {\color{red} bc \Rightarrow dab}, db \Rightarrow c,\ \ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
 & bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
 & dabc \arrow[d, Rightarrow] & dcb \arrow[dr, Rightarrow] & & ad{\color{red}bc} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & dbcc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & acc & & ad{\color{red}dab} \\
ddabc \arrow[d, Rightarrow] & & ccc & & & \\
\cdots & & & & &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ \ ada \Rightarrow dc,\ \ bc \Rightarrow dab,\ \ db \Rightarrow c,\ \ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
 & bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
 & dabc \arrow[d, Rightarrow] & dcb \arrow[dr, Rightarrow] & & adbc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & dbcc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & acc & & addab \\
ddabc \arrow[d, Rightarrow] & & ccc & & & \\
\cdots & & & & &
\end{tikzcd}$$

Réécriture de mots

- **Exemple**: On considère 5 règles de réécriture

$$ab \Rightarrow bc,\ ada \Rightarrow dc,\ bc \Rightarrow dab,\ db \Rightarrow c,\ dcb \Rightarrow acc.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & abc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
 & bcc \arrow[d, Rightarrow] & & adab \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
 & dabc \arrow[d, Rightarrow] & dcb \arrow[dr, Rightarrow] & & adbc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & dbcc \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & acc & & addab \arrow[d, Rightarrow] \\
ddabc \arrow[d, Rightarrow] & & ccc & & & \ldots \\
\ldots & & & & &
\end{tikzcd}$$

Contextes algébriques de réécriture

- Méthodes de réécriture en algèbre:

Contextes algébriques de réécriture

- Méthodes de réécriture en algèbre:
  - Algèbre universelle (systèmes de réécriture de termes), Knuth-Bendix '70.

Contextes algébriques de réécriture

- Méthodes de réécriture en algèbre:
  - Algèbre universelle (systèmes de réécriture de termes), Knuth-Bendix '70.
  - Algèbres commutatives, Buchberger '65.

Contextes algébriques de réécriture

- Méthodes de réécriture en algèbre:
  - Algèbre universelle (systèmes de réécriture de termes), Knuth-Bendix '70.
  - Algèbres commutatives, Buchberger '65.
  - Algèbres associatives, Bokut '76, Bergman '78, Mora '86.

Contextes algébriques de réécriture

- Méthodes de réécriture en algèbre:
  - Algèbre universelle (systèmes de réécriture de termes), Knuth-Bendix '70.
  - Algèbres commutatives, Buchberger '65.
  - Algèbres associatives, Bokut '76, Bergman '78, Mora '86.
  - Opérades, Dotsenko-Khoroshkin '10.

Contextes algébriques de réécriture

- Méthodes de réécriture en algèbre:
  - Algèbre universelle (systèmes de réécriture de termes), Knuth-Bendix '70.
  - Algèbres commutatives, Buchberger '65.
  - Algèbres associatives, Bokut '76, Bergman '78, Mora '86.
  - Opérades, Dotsenko-Khoroshkin '10.
  - Catégories de dimension supérieure, Guiraud-Malbos '09.

Contextes algébriques de réécriture

- Méthodes de réécriture en algèbre:
  - Algèbre universelle (systèmes de réécriture de termes), Knuth-Bendix '70.
  - Algèbres commutatives, Buchberger '65.
  - Algèbres associatives, Bokut '76, Bergman '78, Mora '86.
  - Opérades, Dotsenko-Khoroshkin '10.
  - Catégories de dimension supérieure, Guiraud-Malbos '09.
- **Objectif:** Développer de telles méthodes pour les algèbres diagrammatiques apparaissant en théorie des représentations.

Contextes algébriques de réécriture

- Méthodes de réécriture en algèbre:
  - Algèbre universelle (systèmes de réécriture de termes), Knuth-Bendix '70.
  - Algèbres commutatives, Buchberger '65.
  - Algèbres associatives, Bokut '76, Bergman '78, Mora '86.
  - Opérades, Dotsenko-Khoroshkin '10.
  - Catégories de dimension supérieure, Guiraud-Malbos '09.
- **Objectif:** Développer de telles méthodes pour les algèbres diagrammatiques apparaissant en théorie des représentations.
  - algèbres Khovanov-Lauda-Rouquier (KLR) pour catégorifier des groupes quantiques.
  - algèbres de Heisenberg.
  - algèbres de Brauer et de Birman-Wenzl en théorie des noeuds.

Contextes algébriques de réécriture

- Méthodes de réécriture en algèbre:
  - Algèbre universelle (systèmes de réécriture de termes), Knuth-Bendix '70.
  - Algèbres commutatives, Buchberger '65.
  - Algèbres associatives, Bokut '76, Bergman '78, Mora '86.
  - Opérades, Dotsenko-Khoroshkin '10.
  - Catégories de dimension supérieure, Guiraud-Malbos '09.
- **Objectif:** Développer de telles méthodes pour les algèbres diagrammatiques apparaissant en théorie des représentations.
  - algèbres Khovanov-Lauda-Rouquier (KLR) pour catégorifier des groupes quantiques.
  - algèbres de Heisenberg.
  - algèbres de Brauer et de Birman-Wenzl en théorie des noeuds.
- **Problèmes:**
  - Résoudre le problème du mot: décider de l'égalité de 2 diagrammes.
  - Calculer des bases linéaires.
  - Calculer des présentations cohérentes.
  - Construire explicitement des catégorifications.

Contextes algébriques de réécriture

- Méthodes de réécriture en algèbre:
  - Algèbre universelle (systèmes de réécriture de termes), Knuth-Bendix '70.
  - Algèbres commutatives, Buchberger '65.
  - Algèbres associatives, Bokut '76, Bergman '78, Mora '86.
  - Opérades, Dotsenko-Khoroshkin '10.
  - Catégories de dimension supérieure, Guiraud-Malbos '09.
- **Objectif:** Développer de telles méthodes pour les algèbres diagrammatiques apparaissant en théorie des représentations.
  - algèbres Khovanov-Lauda-Rouquier (KLR) pour catégorifier des groupes quantiques.
  - algèbres de Heisenberg.
  - algèbres de Brauer et de Birman-Wenzl en théorie des noeuds.
- **Problèmes:**
  - Résoudre le problème du mot: décider de l'égalité de 2 diagrammes.
  - Calculer des bases linéaires. ✓
  - Calculer des présentations cohérentes.
  - Construire explicitement des catégorifications.

II. Algèbres diagrammatiques

Algèbres diagrammatiques

- Algèbre diagrammatique: algèbre admettant une présentation par générateurs et relations représentés diagrammatiquement.

Algèbres diagrammatiques

- Algèbre diagrammatique: algèbre admettant une présentation par générateurs et relations représentés diagrammatiquement.
- **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil-Hecke présentée par
  - générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i pour $1 \leq i < n$;

Algèbres diagrammatiques

- Algèbre diagrammatique: algèbre admettant une présentation par générateurs et relations représentés diagrammatiquement.
- **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil-Hecke présentée par
  - générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i pour $1 \leq i < n$;
  - relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

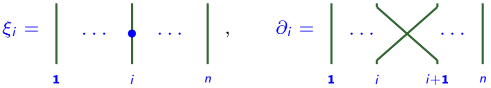
$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$

Algèbres diagrammatiques

- Algèbre diagrammatique: algèbre admettant une présentation par générateurs et relations représentés diagrammatiquement.
- **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil-Hecke présentée par
  - générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i pour $1 \leq i < n$;



  - relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

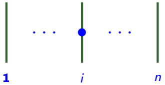
$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

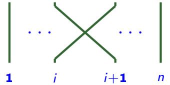
$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$

Algèbres diagrammatiques

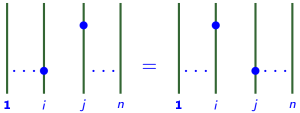
- Algèbre diagrammatique: algèbre admettant une présentation par générateurs et relations représentés diagrammatiquement.
- **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil-Hecke présentée par
  - générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i pour $1 \leq i < n$;

$\xi_i =$ 

, $\partial_i =$ 

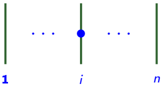
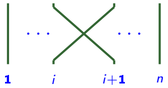
  - relations:

$$\xi_i\xi_j = \xi_j\xi_i$$
$$\partial_i\xi_j = \xi_j\partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$
$$\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$
$$\partial_i^2 = 0$$
$$\partial_i\partial_{i+1}\partial_i = \partial_{i+1}\partial_i\partial_{i+1}$$
$$\xi_i\partial_i - \partial_i\xi_{i+1} = 1$$
$$\partial_i\xi_i - \xi_{i+1}\partial_i = 1$$



Algèbres diagrammatiques

- Algèbre diagrammatique: algèbre admettant une présentation par générateurs et relations représentés diagrammatiquement.
- **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil-Hecke présentée par
  - générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i pour $1 \leq i < n$;

$\xi_i =$  , $\partial_i =$ 

  - relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

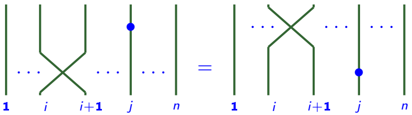
$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

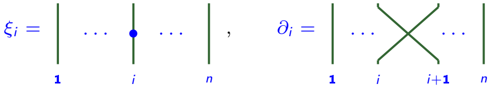
$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$



Algèbres diagrammatiques

- Algèbre diagrammatique: algèbre admettant une présentation par générateurs et relations représentés diagrammatiquement.
- **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil-Hecke présentée par
  - générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i pour $1 \leq i < n$;



  - relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

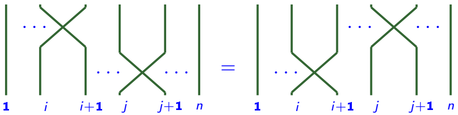
$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

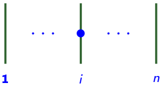
$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

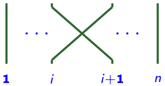
$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$



Algèbres diagrammatiques

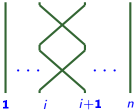
- **Algèbre diagrammatique**: algèbre admettant une présentation par générateurs et relations représentés diagrammatiquement.
- **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil-Hecke présentée par
  - générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i pour $1 \leq i < n$;

$\xi_i =$ 

, $\partial_i =$ 

  - relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$
$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$
$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$
$$\partial_i^2 = 0$$
$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$
$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$
$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$

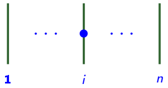


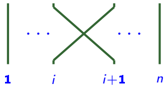
$= 0$

Algèbres diagrammatiques

- Algèbre diagrammatique: algèbre admettant une présentation par générateurs et relations représentés diagrammatiquement.

- **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil-Hecke présentée par
  - générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i pour $1 \leq i < n$;

$\xi_i =$ 

, $\partial_i =$ 

  - relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

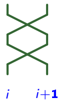
$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$

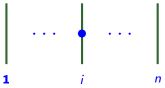


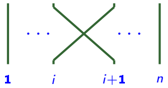
$= 0$

Algèbres diagrammatiques

- Algèbre diagrammatique: algèbre admettant une présentation par générateurs et relations représentés diagrammatiquement.

- **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil-Hecke présentée par
  - générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i pour $1 \leq i < n$;

$\xi_i =$ 

, $\partial_i =$ 

  - relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

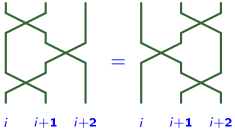
$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

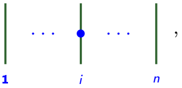
$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

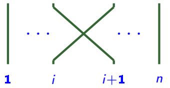
$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$



Algèbres diagrammatiques

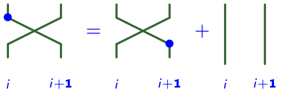
- Algèbre diagrammatique: algèbre admettant une présentation par générateurs et relations représentés diagrammatiquement.
- **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil-Hecke présentée par
  - générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i pour $1 \leq i < n$;

$\xi_i =$ 

, $\partial_i =$ 

  - relations:

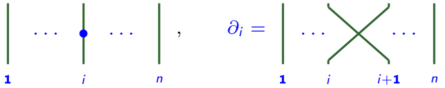
$$\xi_i\xi_j = \xi_j\xi_i$$
$$\partial_i\xi_j = \xi_j\partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$
$$\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$
$$\partial_i^2 = 0$$
$$\partial_i\partial_{i+1}\partial_i = \partial_{i+1}\partial_i\partial_{i+1}$$
$$\xi_i\partial_i - \partial_i\xi_{i+1} = 1$$
$$\partial_i\xi_i - \xi_{i+1}\partial_i = 1$$



Algèbres diagrammatiques

- Algèbre diagrammatique: algèbre admettant une présentation par générateurs et relations représentés diagrammatiquement.
- **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil-Hecke présentée par
  - générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i pour $1 \leq i < n$;

$\xi_i =$, $\partial_i =$



  - relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

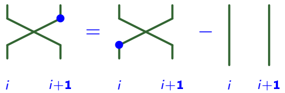
$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

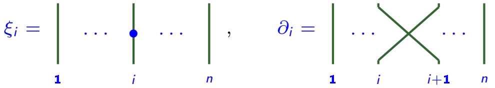
$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$



Algèbres diagrammatiques

- Algèbre diagrammatique: algèbre admettant une présentation par générateurs et relations représentés diagrammatiquement.
- **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil-Hecke présentée par
  - générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i pour $1 \leq i < n$;



  - relations:

$$\xi_i\xi_j = \xi_j\xi_i$$

$$\partial_i\xi_j = \xi_j\partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

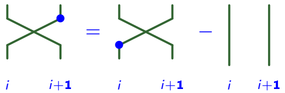
$$\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i\partial_{i+1}\partial_i = \partial_{i+1}\partial_i\partial_{i+1}$$

$$\xi_i\partial_i - \partial_i\xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i\xi_i - \xi_{i+1}\partial_i = 1$$



- Peuvent se décrire par des catégories monoïdales linéaires = 2-catégories linéaires avec un seul objet.

2-catégories linéaires

- Une 2-catégorie $\mathbb{K}$-linéaire est la donnée de:

2-catégories linéaires

- Une 2-catégorie $\mathbb{K}$-linéaire est la donnée de:
  - 0-cellules $\mathcal{C}_\mathbf{0}$;
  - 1-cellules $\mathcal{C}_\mathbf{1}$;
  - 2-cellules $\mathcal{C}_\mathbf{2}$ ...

2-catégories linéaires

- Une 2-catégorie $\mathbb{K}$-linéaire est la donnée de:
  - 0-cellules $\mathcal{C}_0$;
  - 1-cellules $\mathcal{C}_1$;
  - 2-cellules $\mathcal{C}_2$ ...
  - applications source et but s_i, t_i pour $0 \leq i \leq 1$, compatibles avec la structure linéaire;

2-catégories linéaires

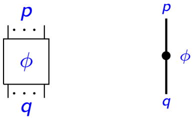
- Une 2-catégorie $\mathbb{K}$-linéaire est la donnée de:
  - 0-cellules $\mathcal{C}_0$;
  - 1-cellules $\mathcal{C}_1$;
  - 2-cellules $\mathcal{C}_2$ ...
  - applications source et but s_i, t_i pour $0 \leq i \leq 1$, compatibles avec la structure linéaire;
  - 2 compositions $\star_0$ et $\star_1$ telles que $\star_1 : \mathcal{C}_2(p, q) \otimes \mathcal{C}_2(q, r) \to \mathcal{C}_2(p, r)$ est linéaire.

2-catégories linéaires

- Une 2-catégorie $\mathbb{K}$-linéaire est la donnée de:
  - 0-cellules $\mathcal{C}_0$;
  - 1-cellules $\mathcal{C}_1$;
  - 2-cellules $\mathcal{C}_2$ ... telles que pour tous p, q dans $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2(p, q)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  - applications source et but s_i, t_i pour $0 \leq i \leq 1$, compatibles avec la structure linéaire;
  - 2 compositions $\star_0$ et $\star_1$ telles que $\star_1 : \mathcal{C}_2(p, q) \otimes \mathcal{C}_2(q, r) \rightarrow \mathcal{C}_2(p, r)$ est linéaire.

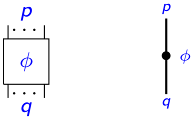
2-catégories linéaires

- Une 2-catégorie $\mathbb{K}$-linéaire est la donnée de:
  - 0-cellules $\mathcal{C}_0$;
  - 1-cellules $\mathcal{C}_1$;
  - 2-cellules $\mathcal{C}_2$ ... telles que pour tous p, q dans $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2(p,q)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  - applications source et but s_i, t_i pour $0 \leq i \leq 1$, compatibles avec la structure linéaire;
  - 2 compositions $\star_0$ et $\star_1$ telles que $\star_1 : \mathcal{C}_2(p,q) \otimes \mathcal{C}_2(q,r) \to \mathcal{C}_2(p,r)$ est linéaire.
- Les 2-cellules peuvent être représentées par des circuits ou des diagrammes de cordes:

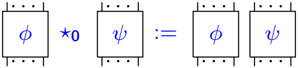


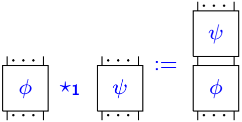
2-catégories linéaires

- Une 2-catégorie $\mathbb{K}$-linéaire est la donnée de:
  - 0-cellules $\mathcal{C}_0$;
  - 1-cellules $\mathcal{C}_1$;
  - 2-cellules $\mathcal{C}_2$ ... telles que pour tous p, q dans $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2(p,q)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  - applications source et but s_i, t_i pour $0 \leq i \leq 1$, compatibles avec la structure linéaire;
  - 2 compositions $\star_0$ et $\star_1$ telles que $\star_1 : \mathcal{C}_2(p,q) \otimes \mathcal{C}_2(q,r) \to \mathcal{C}_2(p,r)$ est linéaire.
- Les 2-cellules peuvent être représentées par des circuits ou des diagrammes de cordes:



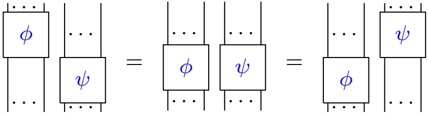
et les compositions:





2-catégories linéaires

- Ces compositions satisfont la relation d'échange:

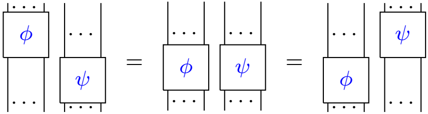


i.e pour toutes 2-cellules $\phi : p \Rightarrow q$, $\psi : p' \Rightarrow q'$,

$$(\psi \star_0 1_{q'}) \star_1 (1_p \star_0 \psi) = (1_q \star_1 \psi) \star_0 (\phi \star_1 1_{p'})$$

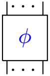
2-catégories linéaires

- Ces compositions satisfont la relation d'échange:



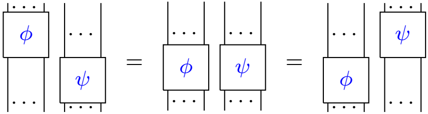
i.e pour toutes 2-cellules $\phi : p \Rightarrow q$, $\psi : p' \Rightarrow q'$,

$$(\psi \star_0 1_{q'}) \star_1 (1_p \star_0 \psi) = (1_q \star_1 \psi) \star_0 (\phi \star_1 1_{p'})$$

- Un élément de la forme λ  où ϕ est obtenue par compositions $\star_0$ et $\star_1$ de 2-cellules génératrices est appelé un monôme.

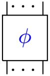
2-catégories linéaires

- Ces compositions satisfont la relation d'échange:



i.e pour toutes 2-cellules $\phi : p \Rightarrow q$, $\psi : p' \Rightarrow q'$,

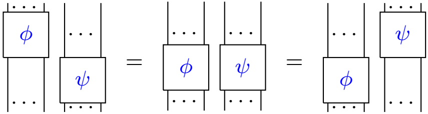
$$(\psi \star_0 1_{q'}) \star_1 (1_p \star_0 \psi) = (1_q \star_1 \psi) \star_0 (\phi \star_1 1_{p'})$$

- Un élément de la forme λ  où ϕ est obtenue par compositions $\star_0$ et $\star_1$ de 2-cellules génératrices est appelé un monôme.

- Toute 2-cellule ϕ dans $\mathcal{C}_2$ peut être décomposée en une somme de monômes.

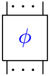
2-catégories linéaires

- Ces compositions satisfont la relation d'échange:



i.e pour toutes 2-cellules $\phi : p \Rightarrow q$, $\psi : p' \Rightarrow q'$,

$$(\psi \star_0 1_{q'}) \star_1 (1_p \star_0 \psi) = (1_q \star_1 \psi) \star_0 (\phi \star_1 1_{p'})$$

- Un élément de la forme λ  où ϕ est obtenue par compositions $\star_0$ et $\star_1$ de 2-cellules génératrices est appelé un monôme.
- Toute 2-cellule ϕ dans $\mathcal{C}_2$ peut être décomposée en une somme de monômes.
- Monômes apparaissant dans cette décomposition : support de ϕ.

III. Réécriture linéaire

Présentation par un système de réécriture

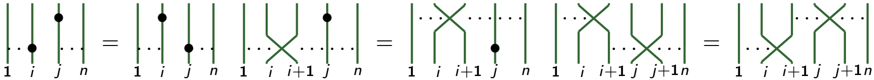
- En réécriture, on ne regarde plus les relations comme équationnelles, mais orientées.

Présentation par un système de réécriture

- En réécriture, on ne regarde plus les relations comme équationnelles, mais orientées.
- **Exemple** : pour les algèbres nil Hecke,

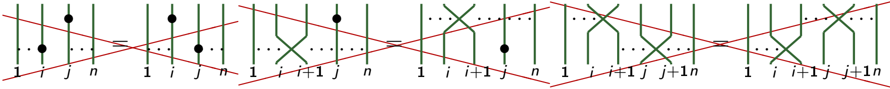
Présentation par un système de réécriture

- En réécriture, on ne regarde plus les relations comme équationnelles, mais orientées.
- **Exemple** : pour les algèbres nil Hecke,



Présentation par un système de réécriture

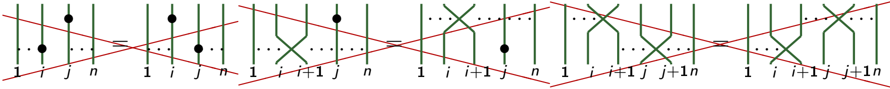
- En réécriture, on ne regarde plus les relations comme équationnelles, mais orientées.
- **Exemple** : pour les algèbres nil Hecke,



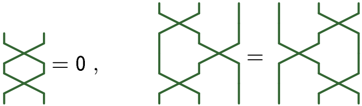
  - Ce sont les relations d'échange.

Présentation par un système de réécriture

- En réécriture, on ne regarde plus les relations comme équationnelles, mais orientées.
- **Exemple** : pour les algèbres nil Hecke,

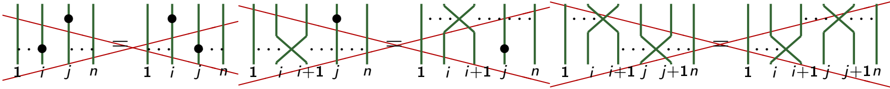


  - Ce sont les relations d'échange.

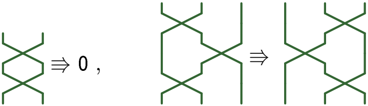


Présentation par un système de réécriture

- En réécriture, on ne regarde plus les relations comme équationnelles, mais orientées.
- **Exemple** : pour les algèbres nil Hecke,



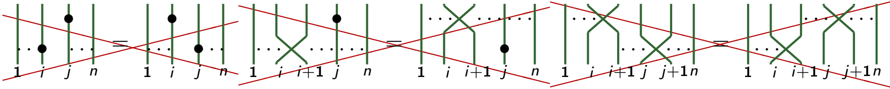
  - Ce sont les relations d'échange.



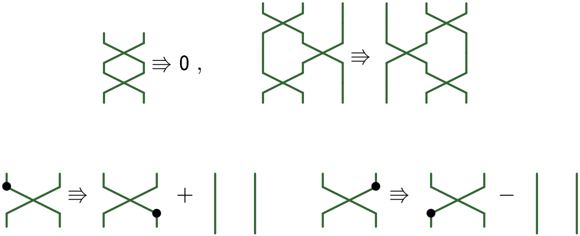
- Le choix d'une orientation des règles donne un système de réécriture diagrammatique (3-SRD),

Présentation par un système de réécriture

- En réécriture, on ne regarde plus les relations comme équationnelles, mais orientées.
- **Exemple** : pour les algèbres nil Hecke,



  - Ce sont les relations d'échange.



- Le choix d'une orientation des règles donne un système de réécriture diagrammatique (3-SRD), qui présente la 2-catégorie linéaire.

Réécriture linéaire

- Vigilence en réécriture linéaire:

Réécriture linéaire

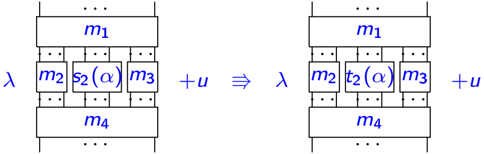
- Vigilence en réécriture linéaire: si $u \Rightarrow v$ est une réécriture, alors $-u \Rightarrow -v$, et donc $v = (u+v) - u \Rightarrow u + v - v = u$.

Réécriture linéaire

- Vigilence en réécriture linéaire: si $u \Rightarrow v$ est une réécriture, alors $-u \Rightarrow -v$, et donc $v = (u+v) - u \cancel{\Rightarrow} u + v - v = u$.

Réécriture linéaire

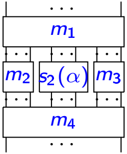
- Vigilence en réécriture linéaire: si $u \Rightarrow v$ est une réécriture, alors $-u \Rightarrow -v$, et donc $v = (u+v) - u \cancel{\Rightarrow} u + v - v = u$.
- Une étape de réécriture d'un 3-DRS est une 3-cellule de la forme

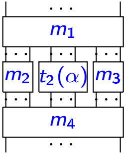


où $s_2(\alpha) \mid\mid t_2(\alpha)$ et t.q le monôme de gauche n'apparaît pas dans la décomposition de u.

Réécriture linéaire

- Vigilence en réécriture linéaire: si $u \Rightarrow v$ est une réécriture, alors $-u \Rightarrow -v$, et donc $v = (u+v) - u \cancel{\Rightarrow} u + v - v = u$.
- Une étape de réécriture d'un 3-DRS est une 3-cellule de la forme

λ 

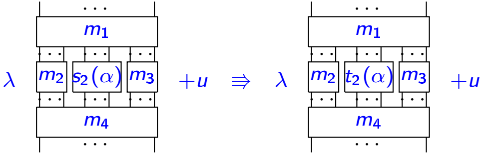
$+u \Rrightarrow \lambda$ 

$+u$

  où $s_2(\alpha) \mid\mid t_2(\alpha)$ et t.q le monôme de gauche n'apparaît pas dans la décomposition de u.
- 2 propriétés fondamentales de réécriture:

Réécriture linéaire

- Vigilence en réécriture linéaire: si $u \Rightarrow v$ est une réécriture, alors $-u \Rightarrow -v$, et donc $v = (u+v) - u \cancel{\Rightarrow} u + v - v = u$.
- Une étape de réécriture d'un 3-DRS est une 3-cellule de la forme

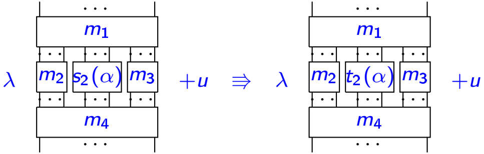


  où $s_2(\alpha) \parallel t_2(\alpha)$ et t.q le monôme de gauche n'apparaît pas dans la décomposition de u.
- 2 propriétés fondamentales de réécriture:
  - Terminaison: il n'existe pas de suite infinie de réécriture.

$$\phi_1 \Rightarrow \phi_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \underbrace{\phi_n}_{\text{forme normale}}$$

Réécriture linéaire

- Vigilence en réécriture linéaire: si $u \Rrightarrow v$ est une réécriture, alors $-u \Rrightarrow -v$, et donc $v = (u+v) - u \cancel{\Rrightarrow} u + v - v = u$.
- Une étape de réécriture d'un 3-DRS est une 3-cellule de la forme



  où $s_2(\alpha) \mid\mid t_2(\alpha)$ et t.q le monôme de gauche n'apparaît pas dans la décomposition de u.
- 2 propriétés fondamentales de réécriture:
  - Terminaison: il n'existe pas de suite infinie de réécriture.

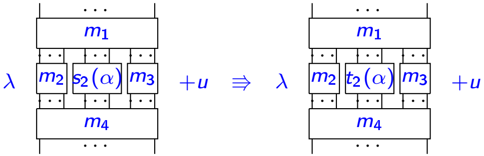
$$\phi_1 \Rrightarrow \phi_2 \Rrightarrow \dots \Rrightarrow \underbrace{\phi_n}_{\text{forme normale}}$$

  - Confluence:

$$\begin{tikzcd} & \phi_1 \\ \phi \arrow[ur, Rrightarrow, bend left, "f"] \arrow[dr, Rrightarrow, bend right, "g"'] & \\ & \phi_2 \end{tikzcd}$$

Réécriture linéaire

- Vigilence en réécriture linéaire: si $u \Rrightarrow v$ est une réécriture, alors $-u \Rrightarrow -v$, et donc $v = (u+v) - u \cancel{\Rrightarrow} u + v - v = u$.
- Une étape de réécriture d'un 3-DRS est une 3-cellule de la forme



où $s_2(\alpha) \,||\, t_2(\alpha)$ et t.q le monôme de gauche n'apparaît pas dans la décomposition de u.

- 2 propriétés fondamentales de réécriture:
  - Terminaison: il n'existe pas de suite infinie de réécriture.

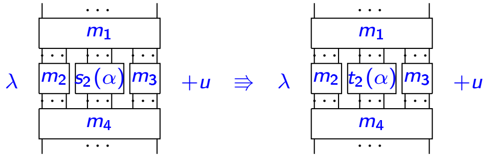
$$\phi_1 \Rrightarrow \phi_2 \Rrightarrow \dots \Rrightarrow \underbrace{\phi_n}_{\text{forme normale}}$$

  - Confluence:

$$\begin{tikzcd}
 & \phi_1 \arrow[dr, Rrightarrow, "f'"] & \\
\phi \arrow[ur, Rrightarrow, "f"] \arrow[dr, Rrightarrow, "g"'] & & \phi' \\
 & \phi_2 \arrow[ur, Rrightarrow, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

Réécriture linéaire

- Vigilence en réécriture linéaire: si $u \Rrightarrow v$ est une réécriture, alors $-u \Rrightarrow -v$, et donc $v = (u+v) - u \cancel{\Rrightarrow} u + v - v = u$.
- Une étape de réécriture d'un 3-DRS est une 3-cellule de la forme



  où $s_2(\alpha) \,||\, t_2(\alpha)$ et t.q le monôme de gauche n'apparaît pas dans la décomposition de u.
- 2 propriétés fondamentales de réécriture:
  - Terminaison: il n'existe pas de suite infinie de réécriture.

    $$\phi_1 \Rrightarrow \phi_2 \Rrightarrow \ldots \Rrightarrow \underbrace{\phi_n}_{\text{forme normale}}$$

  - Confluence:

$$\begin{tikzcd} & \phi_1 \arrow[dr, Rrightarrow, "f'"] & \\ \phi \arrow[ur, Rrightarrow, "f"] \arrow[dr, Rrightarrow, "g"'] & & \phi' \\ & \phi_2 \arrow[ur, Rrightarrow, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

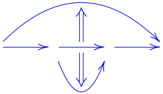
(f, g) : branchement, local si $\ell(f) = \ell(g) = 1$

Branchements critiques

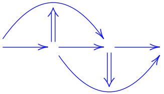
- Un branchement critique est un branchement sur un diagramme "minimal".

Branchements critiques

- Un branchement critique est un branchement sur un diagramme "minimal".
  - Réécriture de mots: branchements critiques ont la forme



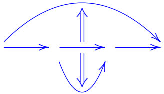
et



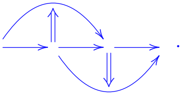
.

Branchements critiques

- Un branchement critique est un branchement sur un diagramme "minimal".
  - Réécriture de mots: branchements critiques ont la forme



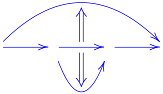
et



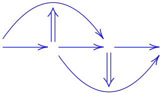
- Un 3-SRD est monômial à gauche si toute source d'une 3-cellule est un monôme.

Branchements critiques

- Un branchement critique est un branchement sur un diagramme "minimal".
  - Réécriture de mots: branchements critiques ont la forme



et

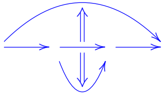


.

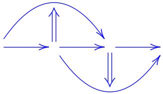
- Un 3-SRD est monômial à gauche si toute source d'une 3-cellule est un monôme.
- Il y a 3 formes différentes de branchements critiques :

Branchements critiques

- Un branchement critique est un branchement sur un diagramme "minimal".
  - Réécriture de mots: branchements critiques ont la forme

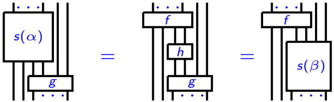


et



.

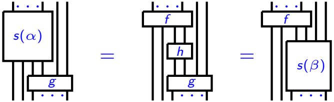
- Un 3-SRD est monômial à gauche si toute source d'une 3-cellule est un monôme.
- Il y a 3 formes différentes de branchements critiques :
  - Branchements critiques réguliers



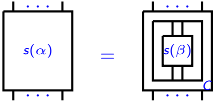
Branchements critiques

- Un branchement critique est un branchement sur un diagramme "minimal".
  - Réécriture de mots: branchements critiques ont la forme

- Un 3-SRD est monômial à gauche si toute source d'une 3-cellule est un monôme.
- Il y a 3 formes différentes de branchements critiques :
  - Branchements critiques réguliers

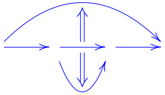


  - Branchements critiques d'inclusion:

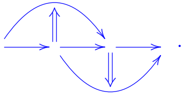


Branchements critiques

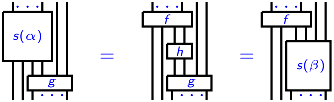
- Un branchement critique est un branchement sur un diagramme "minimal".
  - Réécriture de mots: branchements critiques ont la forme



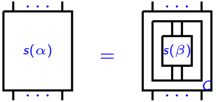
et



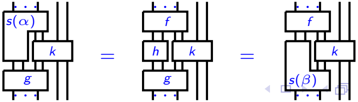
- Un 3-SRD est monômial à gauche si toute source d'une 3-cellule est un monôme.
- Il y a 3 formes différentes de branchements critiques :
  - Branchements critiques réguliers



  - Branchements critiques d'inclusion:



  - Branchements critiques indexés à droite (aussi indexés à gauche, multi-indexés):



Résultats

- **Lemme de Newman**: Un 3-SRD terminant est confluent ssi il est localement confluent.

Résultats

- **Lemme de Newman**: Un 3-SRD terminant est confluent ssi il est localement confluent.

- **Lemme des paires critiques**: Un 3-SRD terminant est localement confluent ssi ses branchements critiques sont confluents.

Résultats

- **Lemme de Newman**: Un 3-SRD terminant est confluent ssi il est localement confluent.
- **Lemme des paires critiques**: Un 3-SRD terminant est localement confluent ssi ses branchements critiques sont confluents.
- Soit Σ un 3-SRD monômial à gauche, terminant et confluent, et $\mathcal{C}$ la 2-catégorie linéaire qu'il présente. Pour toutes 1-cellules parallèles u, v, l'ensemble des monômes de $\Sigma(u, v)$ en forme normale forme une base de $\mathcal{C}(u, v)$.

Exemple: les algèbres Khovanov-Lauda-Rouquier (KLR)

- En théorie des représentations, on étudie des actions d'une structure algébrique sur des espaces vectoriels ou sur des catégories.

Exemple: les algèbres Khovanov-Lauda-Rouquier (KLR)

- En théorie des représentations, on étudie des actions d'une structure algébrique sur des espaces vectoriels ou sur des catégories.
- Les algèbres KLR ont été définies en vue d'un processus de catégorification d'un groupe quantique $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable $\mathfrak{g}$.

Exemple: les algèbres Khovanov-Lauda-Rouquier (KLR)

- En théorie des représentations, on étudie des actions d'une structure algébrique sur des espaces vectoriels ou sur des catégories.
- Les algèbres KLR ont été définies en vue d'un processus de catégorification d'un groupe quantique $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable $\mathfrak{g}$.
- Soit Γ le graphe de Dynkin de $\mathfrak{g}$, et I son ensemble de sommets. On considère:

Exemple: les algèbres Khovanov-Lauda-Rouquier (KLR)

- En théorie des représentations, on étudie des actions d'une structure algébrique sur des espaces vectoriels ou sur des catégories.
- Les algèbres KLR ont été définies en vue d'un processus de catégorification d'un groupe quantique $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable $\mathfrak{g}$.
- Soit Γ le graphe de Dynkin de $\mathfrak{g}$, et I son ensemble de sommets. On considère:
    - un élément $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i . i \in \mathbb{N}[I]$,

Exemple: les algèbres Khovanov-Lauda-Rouquier (KLR)

- En théorie des représentations, on étudie des actions d'une structure algébrique sur des espaces vectoriels ou sur des catégories.
- Les algèbres KLR ont été définies en vue d'un processus de catégorification d'un groupe quantique $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable $\mathfrak{g}$.
- Soit Γ le graphe de Dynkin de $\mathfrak{g}$, et I son ensemble de sommets. On considère:
  - un élément $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i . i \in \mathbb{N}[I]$, $\rightsquigarrow$ algèbre $R(\mathcal{V})$

Exemple: les algèbres Khovanov-Lauda-Rouquier (KLR)

- En théorie des représentations, on étudie des actions d'une structure algébrique sur des espaces vectoriels ou sur des catégories.

- Les algèbres KLR ont été définies en vue d'un processus de catégorification d'un groupe quantique $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable $\mathfrak{g}$.

- Soit Γ le graphe de Dynkin de $\mathfrak{g}$, et I son ensemble de sommets. On considère:
  - un élément $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i.i \in \mathbb{N}[I]$, $\rightsquigarrow$ algèbre $R(\mathcal{V})$
  - une forme bilinéaire $\cdot$ sur $\mathbb{Z}[I]$ à valeurs dans $\{0, 1\}$,

Exemple: les algèbres Khovanov-Lauda-Rouquier (KLR)

- En théorie des représentations, on étudie des actions d'une structure algébrique sur des espaces vectoriels ou sur des catégories.
- Les algèbres KLR ont été définies en vue d'un processus de catégorification d'un groupe quantique $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable $\mathfrak{g}$.
- Soit Γ le graphe de Dynkin de $\mathfrak{g}$, et I son ensemble de sommets. On considère:
  - un élément $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i . i \in \mathbb{N}[I]$, $\rightsquigarrow$ algèbre $R(\mathcal{V})$
  - une forme bilinéaire $\cdot$ sur $\mathbb{Z}[I]$ à valeurs dans $\{0, 1\}$,
  - l'ensemble $\mathrm{Seq}(\mathcal{V})$ des suites de m éléments de Γ où i apparaît $\mathcal{V}_i$ fois.

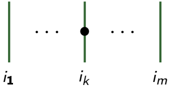
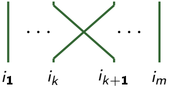
Exemple: les algèbres Khovanov-Lauda-Rouquier (KLR)

- En théorie des représentations, on étudie des actions d'une structure algébrique sur des espaces vectoriels ou sur des catégories.
- Les algèbres KLR ont été définies en vue d'un processus de catégorification d'un groupe quantique $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable $\mathfrak{g}$.
- Soit Γ le graphe de Dynkin de $\mathfrak{g}$, et I son ensemble de sommets. On considère:
  - un élément $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i . i \in \mathbb{N}[I]$, $\rightsquigarrow$ algèbre $R(\mathcal{V})$
  - une forme bilinéaire $\cdot$ sur $\mathbb{Z}[I]$ à valeurs dans $\{0, 1\}$,
  - l'ensemble $\mathrm{Seq}(\mathcal{V})$ des suites de m éléments de Γ où i apparaît $\mathcal{V}_i$ fois.
- **Théorème [Khovanov-Lauda '08]:** Si $R = \bigoplus_{\mathcal{V} \in \mathbb{N}[I]} R(\mathcal{V})$,

$$K_0(R - \mathrm{pmod}) \simeq \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$$

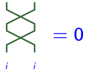
Présentation des algèbres KLR

- Pour $\mathbf{i} = i_1 \dots i_m \in \mathrm{Seq}(\mathcal{V})$, on a des générateurs

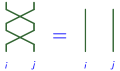
$x_{k,\mathbf{i}} =$  et $\tau_{k,\mathbf{i}} =$ 

- Les relations sont représentées localement par:

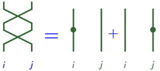
i) Pour $i \in I$,



ii) Pour $i, j \in I$ t.q $i \cdot j = 0$,

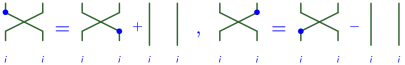


iii) Pour $i, j \in I$ t.q $i \cdot j = -1$,

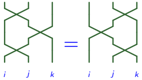


iv) Pour $i, j \in I$,

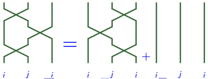
v) Pour $i \in I$,



vi) Pour $i, j, k \in I$, sauf si $i = k$ et $i \cdot j = -1$,

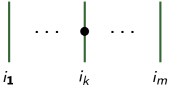


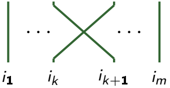
vii) Pour $i, j \in I$ t.q $i \cdot j = -1$,



Présentation des algèbres KLR

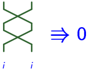
- Pour $\mathbf{i} = i_1 \dots i_m \in \mathrm{Seq}(\mathcal{V})$, on a des générateurs

$x_{k,\mathbf{i}} =$ 

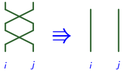
et $\tau_{k,\mathbf{i}} =$ 

- Les relations sont représentées localement par:

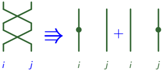
i) Pour $i \in I$,



ii) Pour $i, j \in I$ t.q $i \cdot j = 0$,

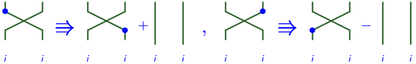


iii) Pour $i, j \in I$ t.q $i \cdot j = -1$,

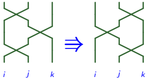


iv) Pour $i, j \in I$,

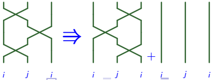
v) Pour $i \in I$,



vi) Pour $i, j, k \in I$, sauf si $i = k$ et $i \cdot j = -1$,



vii) Pour $i, j \in I$ t.q $i \cdot j = -1$,



Présentation convergente

- **Théorème [D. 2017]:** Ce 3-SRD est une présentation convergente (terminante + confluente) des algèbres KLR.

Présentation convergente

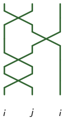
- **Théorème [D. 2017]:** Ce 3-SRD est une présentation convergente (terminante + confluente) des algèbres KLR.
  - Terminaison: on réduit le nombre de croisements et on fait descendre les points.

Présentation convergente

- **Théorème [D. 2017]:** Ce 3-SRD est une présentation convergente (terminante + confluente) des algèbres KLR.
  - Terminaison: on réduit le nombre de croisements et on fait descendre les points.
  - Confluence: étude exhaustive de toutes les familles de branchements critiques.

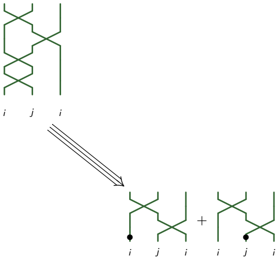
Présentation convergente

- **Théorème [D. 2017]:** Ce 3-SRD est une présentation convergente (terminante + confluente) des algèbres KLR.
  - Terminaison: on réduit le nombre de croisements et on fait descendre les points.
  - Confluence: étude exhaustive de toutes les familles de branchements critiques.



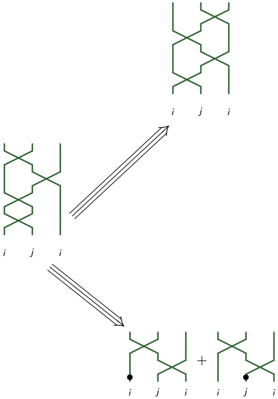
Présentation convergente

- **Théorème [D. 2017]:** Ce 3-SRD est une présentation convergente (terminante + confluente) des algèbres KLR.
  - Terminaison: on réduit le nombre de croisements et on fait descendre les points.
  - Confluence: étude exhaustive de toutes les familles de branchements critiques.



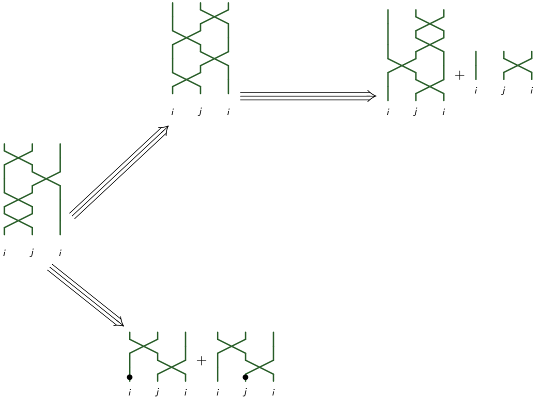
Présentation convergente

- **Théorème [D. 2017]:** Ce 3-SRD est une présentation convergente (terminante + confluente) des algèbres KLR.
  - Terminaison: on réduit le nombre de croisements et on fait descendre les points.
  - Confluence: étude exhaustive de toutes les familles de branchements critiques.



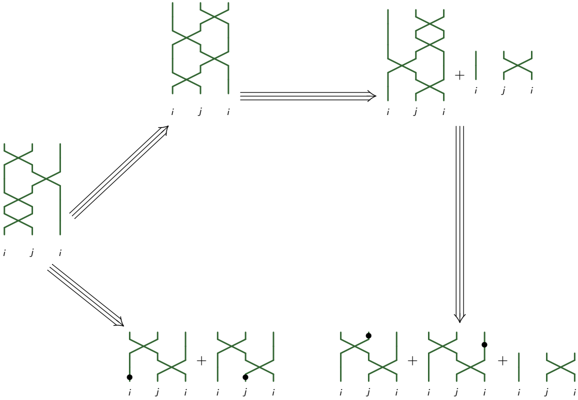
Présentation convergente

- **Théorème [D. 2017]:** Ce 3-SRD est une présentation convergente (terminante + confluente) des algèbres KLR.
  - Terminaison: on réduit le nombre de croisements et on fait descendre les points.
  - Confluence: étude exhaustive de toutes les familles de branchements critiques.



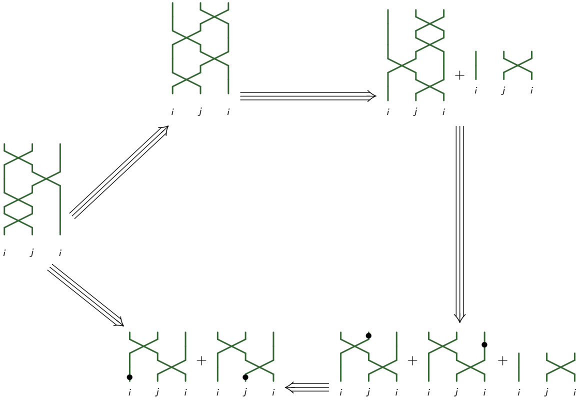
Présentation convergente

- **Théorème [D. 2017]:** Ce 3-SRD est une présentation convergente (terminante + confluente) des algèbres KLR.
  - Terminaison: on réduit le nombre de croisements et on fait descendre les points.
  - Confluence: étude exhaustive de toutes les familles de branchements critiques.



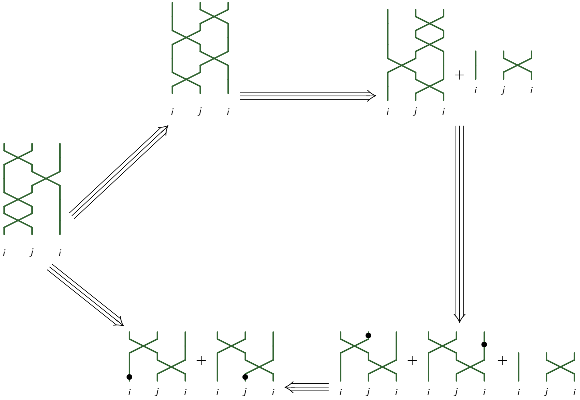
Présentation convergente

- **Théorème [D. 2017]:** Ce 3-SRD est une présentation convergente (terminante + confluente) des algèbres KLR.
  - Terminaison: on réduit le nombre de croisements et on fait descendre les points.
  - Confluence: étude exhaustive de toutes les familles de branchements critiques.



Présentation convergente

- **Théorème [D. 2017]:** Ce 3-SRD est une présentation convergente (terminante + confluente) des algèbres KLR.
  - Terminaison: on réduit le nombre de croisements et on fait descendre les points.
  - Confluence: étude exhaustive de toutes les familles de branchements critiques.



- **Corollaire:** Les diagrammes admettant un nombre minimal de croisements et les point situés en bas des brins forment une base Poincaré-Birkhoff-Witt de ces algèbres.

IV. Réécriture linéaire modulo

Exemple: La 2-catégorie $\mathcal{KLR}$

- Soit $\mathcal{KLR}$ la 2-catégorie linéaire définie par:

Exemple: La 2-catégorie $\mathcal{KLR}$

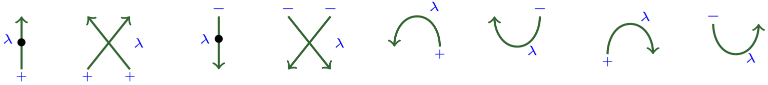
- Soit $\mathcal{KLR}$ la 2-catégorie linéaire définie par:
  - $\mathcal{KLR}_\mathbf{0} = X$ réseau des poids d'une algèbre de Kac-Moody,

Exemple: La 2-catégorie $\mathcal{KLR}$

- Soit $\mathcal{KLR}$ la 2-catégorie linéaire définie par:
  - $\mathcal{KLR}_{\mathbf{0}} = X$ réseau des poids d'une algèbre de Kac-Moody,
  - $\mathcal{KLR}_{\mathbf{1}} = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_{\mathbf{1}}, \ldots, \varepsilon_{\ell(\varepsilon)})$ avec $\varepsilon_i \in \{-,+\}\}$.

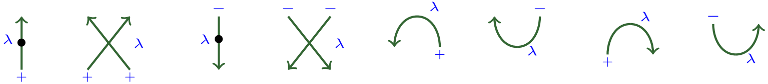
Exemple: La 2-catégorie $\mathcal{KLR}$

- Soit $\mathcal{KLR}$ la 2-catégorie linéaire définie par:
  - $\mathcal{KLR}_\mathbf{0} = X$ réseau des poids d'une algèbre de Kac-Moody,
  - $\mathcal{KLR}_\mathbf{1} = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_\mathbf{1}, \dots, \varepsilon_{\ell(\varepsilon)})$ avec $\varepsilon_i \in \{-,+\}\}$.
  - $\mathcal{KLR}_\mathbf{2}$ admet pour 2-cellules génératrices:



Exemple: La 2-catégorie $\mathcal{KLR}$

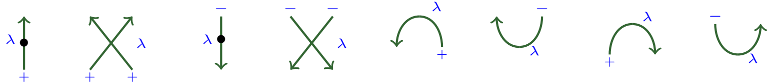
- Soit $\mathcal{KLR}$ la 2-catégorie linéaire définie par:
  - $\mathcal{KLR}_0 = X$ réseau des poids d'une algèbre de Kac-Moody,
  - $\mathcal{KLR}_1 = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\ell(\varepsilon)})$ avec $\varepsilon_i \in \{-,+\}\}$.
  - $\mathcal{KLR}_2$ admet pour 2-cellules génératrices:



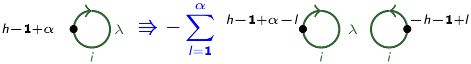
- soumises aux relations suivantes:

Exemple: La 2-catégorie $\mathcal{KLR}$

- Soit $\mathcal{KLR}$ la 2-catégorie linéaire définie par:
  - $\mathcal{KLR}_\mathbf{0} = X$ réseau des poids d'une algèbre de Kac-Moody,
  - $\mathcal{KLR}_\mathbf{1} = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_\mathbf{1}, \ldots, \varepsilon_{\ell(\varepsilon)})$ avec $\varepsilon_i \in \{-,+\}\}$.
  - $\mathcal{KLR}_\mathbf{2}$ admet pour 2-cellules génératrices:



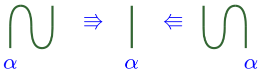
- soumises aux relations suivantes:
  - les relations des algèbres KLR pour les deux orientations de brins.
  - Des relations impliquant des bulles:

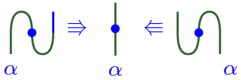


pour tout $\lambda \in X$ et $\alpha > 0$

Exemple: La 2-catégorie $\mathcal{KLR}$

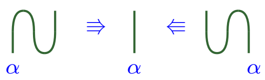
- Des relations d'isotopie:

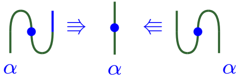




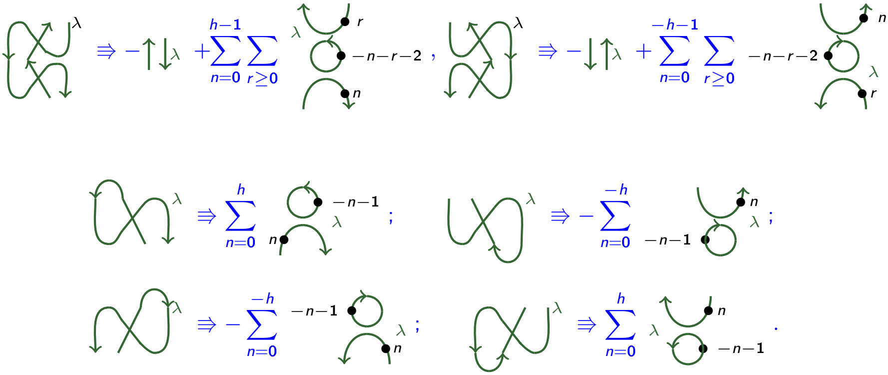
Exemple: La 2-catégorie $\mathcal{KLR}$

- Des relations d'isotopie:



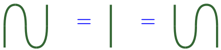


- Relations "quantiques":



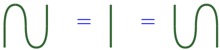
Réécriture modulo

- Certaines relations de la structure algébrique rendent difficile l'analyse de la confluence.
  - **Exemple:** Relations d'ajonctions dans les catégories monoïdales linéaires pivotales:



Réécriture modulo

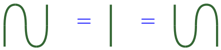
- Certaines relations de la structure algébrique rendent difficile l'analyse de la confluence.
  - **Exemple:** Relations d'ajonctions dans les catégories monoïdales linéaires pivotales:

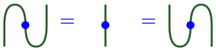


  - On introduit un contexte de réécriture modulo ces règles, avec R règles orientées et E règles modulo, non orientées.

Réécriture modulo

- Certaines relations de la structure algébrique rendent difficile l'analyse de la confluence.
  - **Exemple:** Relations d'ajonctions dans les catégories monoïdales linéaires pivotales:



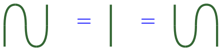


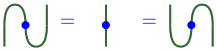
  - On introduit un contexte de réécriture modulo ces règles, avec R règles orientées et E règles modulo, non orientées.

- Trois paradigmes de réécriture modulo:

Réécriture modulo

- Certaines relations de la structure algébrique rendent difficile l'analyse de la confluence.
  - **Exemple:** Relations d'ajonctions dans les catégories monoïdales linéaires pivotales:





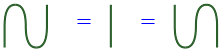
  - On introduit un contexte de réécriture modulo ces règles, avec R règles orientées et E règles modulo, non orientées.

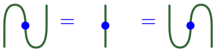
- Trois paradigmes de réécriture modulo:
  - Réécriture avec des étapes de R, mais confluence modulo E, Huet '80

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "R"] \arrow[d, leftrightarrow, "E"'] & u' \arrow[r, dotted, "R"] & w \arrow[d, dotted, "E"] \\
v \arrow[r, "R"'] & v' \arrow[r, dotted, "R"'] & w'
\end{tikzcd}
$$

Réécriture modulo

- Certaines relations de la structure algébrique rendent difficile l'analyse de la confluence.
  - **Exemple:** Relations d'ajonctions dans les catégories monoïdales linéaires pivotales:





  - On introduit un contexte de réécriture modulo ces règles, avec R règles orientées et E règles modulo, non orientées.

- Trois paradigmes de réécriture modulo:
  - Réécriture avec des étapes de R, mais confluence modulo E, Huet '80

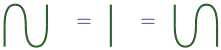
$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "R"] \arrow[d, leftrightarrow, "E"'] & u' \arrow[r, dotted, "R"] & w \arrow[d, dotted, "E"] \\
v \arrow[r, "R"'] & v' \arrow[r, dotted, "R"'] & w'
\end{tikzcd}$$

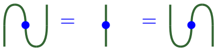
  - Réécriture avec R sur les classes d'équivalence modulo E:

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, dotted, "E\,R\,E"] \arrow[d, "E"'] & v \arrow[d, "E"] \\
u' \arrow[r, "R"'] & v'
\end{tikzcd}$$

Réécriture modulo

- Certaines relations de la structure algébrique rendent difficile l'analyse de la confluence.
  - **Exemple:** Relations d'ajonctions dans les catégories monoïdales linéaires pivotales:





  - On introduit un contexte de réécriture modulo ces règles, avec R règles orientées et E règles modulo, non orientées.

- Trois paradigmes de réécriture modulo:
  - Réécriture avec des étapes de R, mais confluence modulo E, Huet '80

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "R"] \arrow[d, leftrightarrow, "E"'] & u' \arrow[r, dotted, "R"] & w \arrow[d, dotted, "E"] \\ v \arrow[r, "R"'] & v' \arrow[r, dotted, "R"'] & w' \end{tikzcd}$$

  - Réécriture avec R sur les classes d'équivalence modulo E:

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, dotted, "{}_E R_E"] \arrow[d, "E"'] & v \arrow[d, "E"] \\ u' \arrow[r, "R"'] & v' \end{tikzcd}$$

  - Système de réécriture modulo (R, E, S) tel que $R \subseteq S \subseteq {}_E R_E$.

Résultats

- Confluence modulo:

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "S^*"] \arrow[d, leftrightarrow, "E"'] & u' \arrow[r, dotted, "S^*"] & w \arrow[d, dotted, "E"] \\
v \arrow[r, "S^*"'] & v' \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w'
\end{tikzcd}$$

Résultats

- Confluence modulo:

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "S^*"] \arrow[d, leftrightarrow, "E"'] & u' \arrow[r, dotted, "S^*"] & w \arrow[d, dotted, "E"] \\
v \arrow[r, "S^*"'] & v' \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w'
\end{tikzcd}
$$

- **Théorème [D. - Malbos '18], Lemme des paires critiques modulo** : Pour S un système de réécriture modulo tel que ${}_E R_E$ termine, S est confluent modulo E ssi les branchements critiques modulo E de la forme

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "\parallel"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^{\top}"] \\
u \arrow[r, "R^{*(1)}"'] & w \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "E^{\top(1)}"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^{\top}"] \\
u' \arrow[rr, dotted, "S^*"'] & & w
\end{tikzcd}
$$

sont confluents modulo E.

Résultats

- Confluence modulo:

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^*"] \arrow[d, leftrightarrow, "E"'] & u' \arrow[r, dotted, "S^*"] & w \arrow[d, dotted, "E"] \\ v \arrow[r, "S^*"'] & v' \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w' \end{tikzcd}$$

- **Théorème [D. - Malbos '18], Lemme des paires critiques modulo** : Pour S un système de réécriture modulo tel que ${}_E R_E$ termine, S est confluent modulo E ssi les branchements critiques modulo E de la forme

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "\parallel"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^\top"] \\ u \arrow[r, "R^{*(1)}"'] & w \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "E^{\top(1)}"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^\top"] \\ u' \arrow[rr, dotted, "S^*"'] & & w \end{tikzcd}$$

  sont confluents modulo E.

- **Théorème [D. '19]** Soit (R, E, S) un 3-SRD modulo et $\mathcal{C}$ la catégorie présentée par $R \coprod E$, tel que S termine et S est confluent modulo E. Alors, pour toutes 1-cellules parallèles u et v, l'ensemble des E-formes normales des monômes en forme normale pour S forme une base de $\mathcal{C}_2(u, v)$.

Résultats

- Confluence modulo:

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^*"] \arrow[d, leftrightarrow, "E"'] & u' \arrow[r, dotted, "S^*"] & w \arrow[d, dotted, "E"] \\ v \arrow[r, "S^*"'] & v' \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w' \end{tikzcd}$$

- **Théorème [D. - Malbos '18], Lemme des paires critiques modulo** : Pour S un système de réécriture modulo tel que ${}_E R_E$ termine, S est confluent modulo E ssi les branchements critiques modulo E de la forme

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "||"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^\top"] \\ u \arrow[r, "R^{*(1)}"'] & w \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "E^{\top(1)}"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^\top"] \\ u' \arrow[rr, dotted, "S^*"'] & & w \end{tikzcd}$$

 sont confluents modulo E.

- **Théorème [D. '19]** Soit (R, E, S) un 3-SRD modulo et $\mathcal{C}$ la catégorie présentée par $R \coprod E$, tel que S termine et S est confluent modulo E. Alors, pour toutes 1-cellules parallèles u et v, l'ensemble des E-formes normales des monômes en forme normale pour S forme une base de $\mathcal{C}_2(u, v)$.

- **Théorème [D. '19]** Le 3-SRD présentant la 2-catégorie linéaire $\mathcal{KLR}$, moins les 3-cellules d'isotopie, et une présentation terminante et confluente modulo isotopie.

Merci pour votre attention.