

Feuille 11 : Nombres réels

Exercice 1

Soit $X = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$

1. Montrer que X est minoré et majoré.
2. En déduire que X possède une borne inférieure et une borne supérieure, et les déterminer.

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < \frac{mn}{(mn)^2} \leq \frac{1}{4}$$

2. En déduire que

$$A = \left\{ \frac{mn}{(mn)^2} \mid n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

admet une borne inférieure et une borne supérieure, et les déterminer.

Exercice 3

Pour chacun des ensembles suivants, déterminer si ils possèdent un plus grand élément et/ou un plus petit élément, une borne inférieure et/ou une borne supérieure. Si oui, les déterminer.

$$\begin{array}{ll} A = \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1} ; n \in \mathbb{N}^* \right\} & B = \left\{ 2 + \frac{5}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\} \\ C = \left\{ \frac{1}{1 - 2^{-n}} ; n \in \mathbb{N}^* \right\} & D = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\} \\ E = \left\{ \frac{x}{|x^3 - 1|} ; x \in]0, 1[\cup]1, \infty[\right\} & F = \left\{ \frac{x^n}{|x^n - 1|} ; x \in]0, 1[\cup]1, \infty[, n \in \mathbb{N}^* \right\} \end{array}$$

Exercice 4

Soient A et B deux parties non vides et bornées de \mathbb{R} , et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$\begin{array}{ll} -A = \{-a ; a \in A\} & A + B = \{a + b ; a \in A, b \in B\} \\ x + A = \{x + a ; a \in A\} & AB = \{ab ; a \in A, b \in B\}. \end{array}$$

1. Montrer que B est minoré si et seulement si A est majoré et que $\inf(B) = \sup(A)$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
3. Montrer que $\sup(x + A) = x + \sup(A)$.
4. A-t-on toujours $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$? Quelle condition faut-il ajouter sur A et B pour que ce soit vrai?

Exercice 5

Soit A une partie non vide et bornée de \mathbb{R} . On pose $B = \{|x - y| ; (x, y) \in A^2\}$.

1. Justifier que B est bornée.
2. Montrer que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 6

Déterminer les ensembles suivants, et les mettre sous la forme d'un intervalle de \mathbb{R} ou d'une réunion d'intervalles.

$$\begin{array}{ll} A_1 = \{x \in \mathbb{R} ; x^2 < 1\} & A_3 = \left\{ x \in \mathbb{R} ; -1 < \frac{2x}{x^2 + 1} < 1 \right\} \\ A_5 = \left\{ x \in \mathbb{R} ; -1 < \frac{1}{x^2 - 1} < 1 \right\} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} A_2 = \{x \in \mathbb{R} ; x^3 \leq 1\} & A_4 = \left\{ x \in \mathbb{R}^* ; \frac{1}{|x|} > 1 \right\} \end{array}$$

Exercice 7 Soient x et y deux nombres réels. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$
$$\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Exercice 8 Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier pair. En déduire que la partie entière de $(2 + \sqrt{3})^n$ est un entier impair.

Exercice 10 Montrer que le nombre réel

$$\gamma = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}$$

est un entier naturel que l'on déterminera.

Indication : On pourra montrer que γ est solution d'une équation de degré 3 à coefficients entiers.

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$.
2. En déduire un encadrement du nombre réel

$$S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$$