Feuille 3
Espaces vectoriels

Exercice 1.

Etudier la dépendance linéaire des vecteurs de R^2 suivants :

1. $u=(2,-3)$, $v=(-1,1)$.
2. $u=(-6,2)$, $v=(9,-3)$.
3. $u=(m+1,-1)$, $v=(-3,m-1)$ où $m\in R$.

Exercice 2.

Les familles de R^3 suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $u=(1,1,1)$, $v=(1,1,-1)$.
2. $u=(1,0,-1)$, $v=(-1,1,0)$, $w=(0,-1,1)$.
3. $u=(1,1,0)$, $v=(0,1,1)$, $w=(1,0,1)$, $z=(-1,1,1)$.
4. $u=(1,1,1)$, $v=(2,-1,2)$, $w=(1,-2,-1)$.
5. $u=(10,-5,15)$, $v=(-4,2,-6)$.

Les familles données ci-dessus sont-elles génératrices de R^3 ? Lorsque que la réponse est négative on déterminera le sous-espace engendré et sa nature géométrique.

Exercice 3.

On considère les sous-ensembles de R^3 suivants :

$F_1=\{(x,y,z)\in R^3, y=z=0\}$

$F_2=\{(x,y,z)\in R^3, x+y=0\}$

$F_3=\{(x,y,z)\in R^3, x+z=y\}$

$F_4=\{(x,y,z)\in R^3, x=y\}$

1. Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de R^3 ; donner une base et la dimension de chacun d'eux.
2. Déterminer F_2+F_3
3. Déterminer $F_2\cap F_3$ et sa dimension. Que peut-on en déduire pour F_2 et F_3 ?
4. Montrer que F_1 et F_2 sont suppémentaires.
5. Montrer que F_1 et F_4 sont supplémentaires.
6. Quelle remarque peut-on faire en considérant les questions 4. et 5. ?
7. Indiquer la nature géométrique de chaque F_i .

Exercice 4.

On considère les sous-ensembles de R^4 suivants :

$F=\{(x,y,z,t)\in R^4, x+y+z+t=0\}$

$G=\{(x,y,z,t)\in R^4, x+y=z+t\}$

$H=\{(a,b,c,d)\in R^4, a=b=c=d\}$

1. Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de R^4 , donner une base et la dimension de chacun d'eux.
2. Quelle est la dimension de $F+G$?

3. Montrer que $R^4 = F \oplus H$.

Exercice 5.

Soit F le sous-espace vectoriel de R^3 engendré par $u_1=(2,-3,1)$ et $u_2=(2,-2,1)$.

1. Quelle est la dimension de F ?
2. Démontrer que le vecteurs $u=(0,1,0)$ est élément de F , mais que $v=(0,0,1)$ ne l'est pas.
3. Calculer les composantes du vecteurs $w=(0,4,0)\in F$ dans la base (u_1,u_2) .
4. Exprimer qu'un vecteur $v=(x,y,z)$ appartient à F par une équation en x,y,z .
5. Indiquer la nature géométrique de F .

Exercice 6.

Soit $E=\{(x,y,z,t)\in R^4, x+y=0\, et\, z=2t\}$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de R^4 et déterminer une base de E . Compléter cette base en une base de R^4 .

Exercice 7.

Soit $a\in R$ et E_a le sous-espace vectoriel de R^3 engendré par trois vecteurs $(1,1,a)$, $(1,a,1)$ et $(a,1,1)$. Suivant la valeur de a , déterminer la dimension de E_a .

Exercice 8.

Soit $E=\{P\in R_2[X], P(1)=0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $R_2[X]$.
2. Donner une base de E et en déduire sa dimension.

Exercice 9.

Soit $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ une famille de polynômes tels que pour tout $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, $d^\circ P_k=k$

Montrer que cette famille est libre.

Exercice 10.

Soient $f(x)=\cos(x)$, $g(x)=\cos(x)\cos(2x)$ et $h(x)=\sin(x)\sin(2x)$. Déterminer $Vect(f,g,h)$.

Exercice 11.

Pourquoi les polynômes $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ forment-ils une base de l'espace vectoriel $R_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3 ?

Exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Exercice 12.

Soit $E=\{P\in R_2[X] \,|\, P=\lambda+(2\lambda-3\mu)X+\mu X^2, \lambda\in R, \mu\in R\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $R_2[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2) et en donner une base.

Exercice 13.

Dans le R -espace vectoriel $C^\infty([a,b],R)$ des applications de classe C^∞ de $[a,b]$ dans R , montrer que les familles suivantes sont libres :

a) $\{x, e^x\}$ b) $\{e^x, e^{2x}\}$ c) $\{x, \sin(x)\}$ d) $\{\cos(x), \sin(x)\}$

Exercice 14.

Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $E \subset E$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence :

$u_{n+2}=u_{n+1}+2u_n (n\geq 0)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que les suites de terme général $a_n=(-1)^n$ et $b_n=2^n$ forment une famille libre de E .
3. Tenant compte du fait qu'une suite (u_n) est entièrement déterminée par la donnée de u_0 et u_1 , montrer que (a_n) et (b_n) forment une base de E .
4. Déterminer les suites (u_n) de E telles que $u_0=1$ et $u_1=-2$.

Exercice 15.

Résoudre dans R les systèmes suivants, en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

a) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 5x+2y-z=0 \\ -3x-4y+3z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ 5x+2y-z=5 \\ -3x-4y+3z=1 \end{cases}$

Exercice 16.

Résoudre, suivant les valeurs de $\lambda \in R$, le système :

$$\begin{cases} (2-\lambda)x+2y=0 \\ x+(2-\lambda)y+z=0 \\ 2y+(2-\lambda)z=0 \end{cases}$$

Exercice 17.

Soient a,b et c trois fonctions continues sur un intervalle I , avec $\forall x\in I, a(x)\neq 0$. On appelle E l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$

Montrer que E est un espace vectoriel.

Exercice 18.

Dans l'espace R^4 , on se donne cinq vecteurs : $v_1=(1,1,1,1)$, $v_2=(1,2,3,4)$, $v_3=(3,1,4,2)$, $v_4=(10,4,13,7)$ et $v_5=(1,7,8,14)$

Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.

Exercice 19.

Dans R^4 , comparer les sous-espaces F et G suivants :

$F=Vect((1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,-5))$

$G=Vect((-1,-1,1,-1),(4,1,2,4))$

Exercice 20.

Soient $a=(2,3,-1)$, $b=(1,-1,-2)$, $c=(3,7,0)$ et $d=(5,0,-7)$.

Soient $E=Vect(a,b)$ et $F=Vect(c,d)$ les sous-espaces vectoriels de R^3 . Montrer que $E=F$

Exercice 21.

Soient $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(2,-2,-1)$ et $u_3=(1,1,-1)$

Soient $E=\{(x,y,z)\in R^3, y+z=0\}$ et $F=Vect(u_1,u_2)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de R^3 . Déterminer une base de E .

2. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Est-ce que $u_3 \in F$?
3. Est-ce que $u_3 \in E$?
4. Donner une base de $E \cap F$.
5. Soit $u_4 = (-1,7,5)$, est-ce que $u_4 \in E$? est-ce que $u_4 \in F$?

Exercice 22.

Soit $E = \{(x, y, z) \in R^3, x + y + z = 0\}$

Soient $a = (1,-2,3)$ et $b = (2,1,-1)$ deux vecteurs. On pose $F = Vect(a, b)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de R^3 .
2. Déterminer $E \cap F$.
3. A-t-on $E \oplus F$?

Exercice 23.

Soient $E = Vect(a, b, c, d)$ un sous-espace vectoriel de R^3

$a = (2,-1,-1); b = (-1,2,3); c = (1,4,7); d = (1,1,2)$

1. Est-ce que (a, b, c, d) est une base de R^3 ?
2. Montrer que (a, b) est une base de E .
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant E .
4. Compléter une base de E en une base de R^3 .

Exercice 24.

Soient $E = \{(x, y, z, t) \in R^4, x + y + z - t = 0 \; et \; x - 2y + 2z + t = 0 \; et \; x - y + z = 0\}$

On admettra que E est un espace vectoriel.

Et $F = \{(x, y, z, t) \in R^4, 2x + 6y + 7z - t = 0\}$

Soient $a = (2,1,-1,2)$, $b = (1,1,-1,1)$, $c = (-1,-2,3,7)$ et $d = (4,4,-5,-3)$ quatre vecteurs de R^4 .

Première partie

1. Déterminer une base de E et en déduire la dimension de E .
2. Compléter cette base en une base de R^4 .

Deuxième partie

3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de R^4 .
4. Déterminer une base de F .
5. A-t-on $E \oplus F = R^4$?

Troisième partie

6. Montrer que $F = Vect(b, c, d)$.
7. Soit $u = (x, y, z, t) \in F$, exprimer u comme une combinaison linéaire de b , c et d .

Exercice 25.

Soient $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $R_2[X]$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $R_2[X]$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in R_2[X]$, exprimer P dans la base (P_0, P_1, P_2) .
3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in R_2[X]$, exprimer Q dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Pour tout A , B et C réels montrer qu'il existe un unique polynôme de $R \in R_2[X]$, tel que : $R(0) = A$, $R(1) = B$ et $R(2) = C$.

Exercice 26.

Soit $E=\{P\in R_3[X], P(-1)=0\, et\, P(1)=0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $R_3[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de E .

Exercice 27.

Soit $E=\{(x,y,z,t)\in R^4, x+y+z+t=0, x+2y-z+t=0, -x-y+2z+2t=0\}$ et

$F=\{(x,y,z,t)\in R^4, x+3y+4t=0\}$

1. Donner une base de ces deux sous-espaces vectoriels de R^4 .
2. A-t-on $E\oplus F=R^4$?
3. Soit $a=(1,3,0,4)\in R^4$ et on pose $G=Vect(a)$, a-t-on $G\oplus F=R^4$?

Exercice 28.

Soit $E=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3, x_1+2x_2-3x_3=0\}$

Soit $a=(1,2,-3)$, et $F=Vect(a)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de R^3 , et déterminer une base de cet espace-vectoriel.
2. A-t-on $E\oplus F=R^3$?

On justifiera la réponse.

Exercice 29.

Soit $E=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4, x_1+x_3=0\, et\, x_2+x_4=0\}$

Soient $u_1=(1,1,1,1)$, $u_2=(1,-1,1,-1)$ et $u_3=(1,0,1,0)$

Soit $F=Vect(u_1,u_2,u_3)$

On admettra que E est un espace vectoriel.

1. Donner une base de E et en déduire sa dimension.
2. Déterminer une base de F .
3. Donner une (ou plusieurs) équation(s) qui caractérise(nt) F .
4. Donner une famille génératrice de $E+F$.
5. Montrer que : $E\oplus F=R^4$.

Exercice 30.

Soit $M_n(R)$ l'espace vectoriel des matrices à coefficient dans R à n lignes et n colonnes.

Soit $A_n(R)$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(R)$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA=-A$.

Soit $S_n(R)$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(R)$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA=A$.

1. Montrer que $A_n(R)$ et $S_n(R)$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(R)$.
2. Pour toutes matrices $A\in M_n(R)$, montrer que $\frac{A+{}^tA}{2}\in S_n(R)$ et que $\frac{A-{}^tA}{2}\in A_n(R)$.
3. En déduire que $A_n(R)+S_n(R)=M_n(R)$.
4. A-t-on $A_n(R)\oplus S_n(R)=M_n(R)$?
5. Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, décomposer A en une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 31.

On notera E l'ensemble des matrices réelles dans $M_3(K)$ qui ont la propriété suivante : les trois sommes de ses trois lignes de A, les trois sommes des trois colonnes de A et les deux sommes des deux diagonales de A sont toutes les huit égales.

1. Montrer que E est un sous-espaces vectoriel de $M_3(K)$.
2. Constater que si $A \in E$ alors ${}^tA \in E$.
3. Déterminer les matrices symétriques qui sont aussi dans E.
4. Déterminer les matrices antisymétriques qui sont aussi dans E.
5. En utilisant les questions précédentes et la formule $A = \frac{1}{2}\left(A + {}^tA\right) + \frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$, déterminer la dimension de E.