

## Feuille 4 : Développements limités

**Exercice 4.1** Par un calcul direct, trouver le développement limité d'ordre 2 en 0 pour chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3 + \ln(1 + x + x^2), \quad g(x) = e^{\cos x}, \quad h(x) = 1 + \tan x.$$

**Exercice 4.2** Déterminer, par un calcul direct, les trois premiers termes non nuls du développement limité en 0 pour la fonction  $x \mapsto x^2 + \arcsin x$ . Pourquoi peut-on dire, sans calcul, que le prochain terme est nul ? Calculer le prochain terme non nul. (Remarque : on aura une façon plus efficace de faire ce calcul ; voir Exer. 4.9.)

**Exercice 4.3** Trouver le développement limité d'ordre 3 en 0 pour chacune de ces fonctions d'une variable  $x$  :

$$(a) \quad e^{2x} + x^3 \quad (b) \quad e^x \sin x \quad (c) \quad (\sin x + x)^{17} x^3 + 1 + 3x^2$$

### Exercice 4.4

(a) Calculer les quatre premiers termes du développement limité de la fonction  $x \mapsto \sin x$  au point  $\pi/4$ .

(b) En déduire les quatre termes suivants.

(c) Quel est son vingt-deuxième terme ?

**Exercice 4.5** On s'intéresse au DL (développement limité) d'ordre 3 en  $a = 0$  des fonctions  $f$  et  $g$  définies par les règles

$$f(x) = x^4 + x^3 - x, \quad g(x) = e^{2x}.$$

1. Trouver le DL d'ordre 3 en  $a = 0$  pour chacune de ces fonctions, en justifiant leur existence.
2. En déduire les DL d'ordre 3 en  $a = 0$  pour les fonctions  $f^2$ ,  $fg$ , et  $f^4$ .
3. En déduire les DL d'ordre 3 en  $a = 0$  de la fonction  $g \circ f$ .
4. Déterminer le DL d'ordre 3 en  $a = 0$  de la fonction  $f \circ g$  (attention : piège).

**Exercice 4.6** Trouver le DL d'ordre 4 en 0 pour chacune de ces fonctions d'une variable  $x$  :

$$(a) \quad \ln(1+x) \sin x \quad (b) \quad \ln(1 + \sin x) \quad (c) \quad \sin(\ln(1+x)) \quad (d) \quad \frac{\sin x}{1 + \ln(1+x)}$$

**Exercice 4.7** Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$$x \mapsto f(x) := \frac{e^x}{\cos x}, \text{ en justifiant son existence.}$$

**Exercice 4.8** Trouver le développement limité d'ordre 3 en 0 pour chacune de ces fonctions :

$$(a) \quad (1-x)^3 \quad (b) \quad \frac{e^x}{(1+x)^3} \quad (c) \quad \sqrt{-x^2 + 3x + 1} \quad (d) \quad \frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x}$$

### Exercice 4.9

- (a) Calculer le DL en 0 de la fonction  $x \mapsto (1-x)^{-1/2}$  à l'ordre 3.  
(b) En déduire le DL d'ordre 6 en 0 de la fonction  $x \mapsto (1-x^2)^{-1/2}$ .  
(c) En déduire le DL d'ordre 7 en 0 de la fonction  $x \mapsto \arcsin x$ . Comparer avec le calcul direct de l'Exer. 4.2.

**Exercice 4.10** Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre  $n$  des fonctions suivantes :

(a)  $f(x) = \sin(x^2), n = 13$  (b)  $g(x) = \frac{2x}{1+x^4}, n = 12$  (c)  $h(x) = \arctan(x^2), n = 13$

**Exercice 4.11** On s'intéresse aux DL de certaines fonctions à l'origine.

- (a) Calculer les DL d'ordre 3 des fonctions  $x \mapsto \ln(x+3)$  et  $x \mapsto \ln(x+2)$ .  
(b) En déduire le DL d'ordre 3 de la fonction  $g(x) := 3\ln(x+3) - 2\ln(x+2)$ .  
(c) Montrer que, lorsque cela a un sens,

$$g'(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 6}.$$

Utiliser ce résultat, avec la partie (b), pour trouver le DL d'ordre 2 en 0 de la fonction

$$x \mapsto f(x) := \frac{x}{x^2 + 5x + 6}.$$

- (d) Calculer directement le DL d'ordre 2 en 0 de  $f$  par la division euclidienne.

**Exercice 4.12** On observe que la fonction  $f$  définie par la règle  $f(x) = \frac{e^x - \cos x - x}{\ln(1 + \sin x) - x}$  est de forme indéterminée en 0.

- (a) Prouver que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe, et calculer cette limite.  
(b) Prouver ensuite, si on appelle encore  $f$  le prolongement par continuité de la fonction définie plus haut, la fonction  $f$  admet un développement limité à l'ordre un autour de 0, et le déterminer. (Rép :  $-2 - x + o(x)$ )  
(c) Montrer que  $f$  est dérivable en 0, et calculer  $f'(0)$ . (Rép :  $-1$ )

### Exercice 4.13

(a) Déterminer le développement limité en 0 et d'ordre 4 des fonctions suivantes :

(i)  $\frac{x}{1+x}$  (ii)  $\sin \frac{x}{1+x}$  (iii)  $\frac{\sin x}{1 + \sin x}$ .

(b) Utiliser ces développements limités afin de calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^4 x} \left( \sin \frac{x}{1+x} - \frac{\sin x}{1 + \sin x} \right).$$

Aurait-on pu calculer cette limite par la règle de l'Hôpital ? (Rép :  $1/6$ )

**Exercice 4.14** Il s'avère que la fonction  $f(x) := \frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$  admet une limite lorsque  $x$  tend vers 0 : la trouver. (Rép :  $-1/6$ )

**Exercice 4.15** Il s'agit d'étudier le comportement de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{x \tan(2x)} \quad (x \neq 0)$$

autour de 0. Montrer que  $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = -\infty$ .

**Exercice 4.16** Soit  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = (1+x)^{1/x}$ .

(a) Montrer que l'on peut prolonger  $f$  par continuité en 0, et calculer sa limite en 0.

(b) Lorsque la fonction  $f$  est prolongée en 0 par continuité, montrer que  $f$  admet un développement limité d'ordre 2 dans un voisinage de 0, et déterminer celui-ci.

(Rép :  $e - (e/2)x + (11e/24)x^2 + o(x^2)$ )

## Exercices supplémentaires

**Exercice 4.17** Soit  $f$  la fonction définie pour  $x \neq 0$  par  $f(x) = \frac{[\ln(1+x)]^4}{\arctan(x^3 \sin x)}$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . (Rép : 1)

**Exercice 4.18** Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0, de la fonction  $f(x) = \arccos(x^2)$ . [Indication : étudier  $f'$ ] (Rép :  $\pi/2 - x^2 - x^6/6 + o(x^6)$ )

**Exercice 4.19** Soit  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $t \mapsto f(t) := (1 - t + t^2)^{1/t}$ .

(a) Montrer que  $f$  admet une limite en  $t = 0$ .

(b) Lorsque  $f(0)$  est ainsi prolongée par continuité, montrer que  $f$  admet un développement limité en 0 d'ordre 2, et le calculer.

(Rép :  $e^{-1}[1 + t/2 + 19t^2/24] + o(t^2)$ )