

Feuille 4 : Développements limités

Exercice 4.1 Par un calcul direct, trouver le développement limité d'ordre 2 en 0 pour chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3 + \ln(1+x+x^2), \quad g(x) = e^{\cos x}, \quad h(x) = 1 + \tan x.$$

Exercice 4.2 Déterminer, par un calcul direct, les trois premiers termes non nuls du développement limité en 0 pour la fonction $x \mapsto x^2 + \arcsin x$. Pourquoi peut-on dire, sans calcul, que le prochain terme est nul ? Calculer le prochain terme non nul. (Remarque : on aura une façon plus efficace de faire ce calcul ; voir Exer. 4.9.)

Exercice 4.3 Trouver le développement limité d'ordre 3 en 0 pour chacune de ces fonctions d'une variable x :

(a) $e^{2x} + x^3$ (b) $e^x \sin x$ (c) $(\sin x + x)^{17} x^3 + 1 + 3x^2$

Exercice 4.4

(a) Calculer les quatre premiers termes du développement limité de la fonction $x \mapsto \sin x$ au point $\pi/4$.

(b) En déduire les quatre termes suivants.

(c) Quel est son vingt-deuxième terme ?

Exercice 4.5 On s'intéresse au DL (développement limité) d'ordre 3 en $a = 0$ des fonctions f et g définies par les règles

$$f(x) = x^4 + x^3 - x, \quad g(x) = e^{2x}.$$

1. Trouver le DL d'ordre 3 en $a = 0$ pour chacune de ces fonctions, en justifiant leur existence.
2. En déduire les DL d'ordre 3 en $a = 0$ pour les fonctions f^2 , fg , et f^4 .
3. En déduire les DL d'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $g \circ f$.
4. Déterminer le DL d'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $f \circ g$ (attention : piège).

Exercice 4.6 Trouver le DL d'ordre 4 en 0 pour chacune de ces fonctions d'une variable x :

(a) $\ln(1+x) \sin x$ (b) $\ln(1+\sin x)$ (c) $\sin(\ln(1+x))$ (d) $\frac{\sin x}{1+\ln(1+x)}$

Exercice 4.7 Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$$x \mapsto f(x) := \frac{e^x}{\cos x}, \text{ en justifiant son existence.}$$

Exercice 4.8 Trouver le développement limité d'ordre 3 en 0 pour chacune de ces fonctions :

(a) $(1-x)^3$ (b) $\frac{e^x}{(1+x)^3}$ (c) $\sqrt{-x^2 + 3x + 1}$ (d) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x}$

Exercice 4.9

- (a) Calculer le DL en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x)^{-1/2}$ à l'ordre 3.
 (b) En déduire le DL d'ordre 6 en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x^2)^{-1/2}$.
 (c) En déduire le DL d'ordre 7 en 0 de la fonction $x \mapsto \arcsin x$. Comparer avec le calcul direct de l'Exer. 4.2.

Exercice 4.10 Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sin(x^2)$, $n = 13$ (b) $g(x) = \frac{2x}{1+x^4}$, $n = 12$ (c) $h(x) = \arctan(x^2)$, $n = 13$

Exercice 4.11 On s'intéresse aux DL de certaines fonctions à l'origine.

- (a) Calculer les DL d'ordre 3 des fonctions $x \mapsto \ln(x+3)$ et $x \mapsto \ln(x+2)$.
 (b) En déduire le DL d'ordre 3 de la fonction $g(x) := 3\ln(x+3) - 2\ln(x+2)$.
 (c) Montrer que, lorsque cela a un sens,

$$g'(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 6}.$$

Utiliser ce résultat, avec la partie (b), pour trouver le DL d'ordre 2 en 0 de la fonction

$$x \mapsto f(x) := \frac{x}{x^2 + 5x + 6}.$$

- (d) Calculer directement le DL d'ordre 2 en 0 de f par la division euclidienne.

Exercice 4.12 On observe que la fonction f définie par la règle $f(x) = \frac{e^x - \cos x - x}{\ln(1 + \sin x) - x}$ est de forme indéterminée en 0.

- (a) Prouver que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe, et calculer cette limite.
 (b) Prouver ensuite, si on appelle encore f le prolongement par continuité de la fonction définie plus haut, la fonction f admet un développement limité à l'ordre un autour de 0, et le déterminer. (Rép : $-2 - x + o(x)$)
 (c) Montrer que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$. (Rép : -1)

Exercice 4.13

- (a) Déterminer le développement limité en 0 et d'ordre 4 des fonctions suivantes :

(i) $\frac{x}{1+x}$ (ii) $\sin \frac{x}{1+x}$ (iii) $\frac{\sin x}{1+\sin x}$.

- (b) Utiliser ces développements limités afin de calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^4 x} \left(\sin \frac{x}{1+x} - \frac{\sin x}{1+\sin x} \right).$$

Aurait-on pu calculer cette limite par la règle de l'Hôpital ? (Rép : 1/6)

Exercice 4.14 Il s'avère que la fonction $f(x) := \frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ admet une limite lorsque x tend vers 0 : la trouver. (Rép : $-1/6$)

Exercice 4.15 Il s'agit d'étudier le comportement de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{x \tan(2x)} \quad (x \neq 0)$$

autour de 0. Montrer que $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = -\infty$.

Exercice 4.16 Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (1+x)^{1/x}$.

- (a) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0, et calculer sa limite en 0.
- (b) Lorsque la fonction f est prolongée en 0 par continuité, montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 dans un voisinage de 0, et déterminer celui-ci.
(Rép : $e - (e/2)x + (11e/24)x^2 + o(x^2)$)

Exercices supplémentaires

Exercice 4.17 Soit f la fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{[\ln(1+x)]^4}{\arctan(x^3 \sin x)}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. (Rép : 1)

Exercice 4.18 Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0, de la fonction $f(x) = \arccos(x^2)$. [Indication : étudier f'] (Rép : $\pi/2 - x^2 - x^6/6 + o(x^6)$)

Exercice 4.19 Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $t \mapsto f(t) := (1-t+t^2)^{1/t}$.

- (a) Montrer que f admet une limite en $t = 0$.
- (b) Lorsque $f(0)$ est ainsi prolongée par continuité, montrer que f admet un développement limité en 0 d'ordre 2, et le calculer.
(Rép : $e^{-1}[1+t/2+19t^2/24]+o(t^2)$)