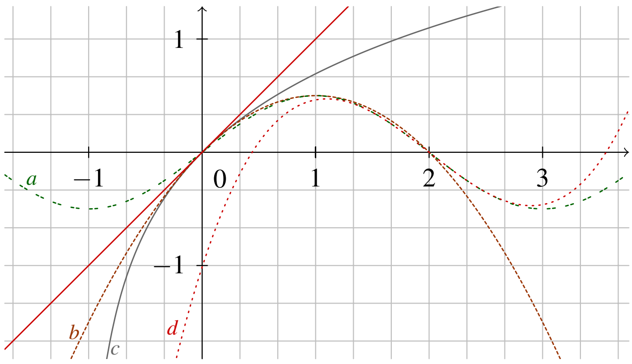
Feuille 6 : Formules de Taylor

On peut s'aider de `http://bit.ly/wimsFonctions` et `http://bit.ly/PolynomeDeTaylor`.

Exercice 6.1 Dans les graphes des fonctions suivantes, identifier $x \mapsto \frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{2}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et la partie polynomiale de leurs développements limités à des points et des ordres qu'on déterminera.



Exercice 6.2 Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour l'application exponentielle en 0 à l'ordre n. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant e \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

puis que e est irrationnel. En donner une approximation à 10^{-4} près.

Exercice 6.3 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Dessiner la situation et montrer que f'' n'est pas majorée par 4.

Exercice 6.4 Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à cos entre 0 et x et en déduire une valeur approchée de $c = \cos\frac{\pi}{32}$ à 10^{-5} près. En utilisant la formule de doublement du cosinus, $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$, en trouver la valeur exacte.

En approchant cos par $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$, quelle majoration de l'erreur pouvez-vous donner sur l'intervalle considéré ? Et si on l'approche par le terme suivant non nul ?

Exercice 6.5
1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour ln au voisinage de 1 à l'ordre deux.
2. En déduire que $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.
3. Montrer que $\forall x > 0, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$.
4. Montrer que la fonction $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ est prolongeable par continuité à $]-1,+\infty[$. En donner un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Exercice 6.6 Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$ au voisinage de 1.

2. cos au voisinage de 0. En déduire que $\forall x > 0, 1-\frac{x^2}{2} < \cos x < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$. Que se passe-t-il pour $x < 0$?
3. $x \mapsto \exp(-x)$ au voisinage de 0. En déduire que $\forall x > 0, 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} < \exp(-x) < 1-x+\frac{x^2}{2}$. Que se passe-t-il pour $x < 0$?

Exercice 6.7 Soit $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Nous allons montrer que f est prolongeable par continuité en une fonction infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! P_n \in \mathbb{R}[X],\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x).$$
Calculer les premiers termes de cette suite.
2. Montrer, que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$ a une limite quand x tend vers 0.
3. Appliquer le théorème de Lagrange à la fonction f sur l'intervalle $[0,x]$ et en ébaucher le graphe.

Exercice 6.8 Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ à valeurs positives. On s'intéresse à la régularité de $g = \sqrt{f}$.

1. Quelle est la régularité de g en un point où f ne s'annule pas ?
2. Estimer les deux premières dérivées de f en un point où elle s'annule.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$. Y faire un développement limité de f et en déduire que g y est dérivable ssi $f''(a) = 0$.

Exercice 6.9 Inégalité de Kolmogorov Étudier la fonction $u \mapsto \frac{2M_0}{u} + \frac{uM_2}{2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour M_0, M_2 deux constantes positives.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable avec $|f| < M_0$ et $|f''| < M_2$. Montrer qu'alors $|f'| < M_1 = 2\sqrt{M_0 M_2}$. (Indication : écrire la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+u$.)