

# Bases de 2-catégories linéaires par réécriture.

---

**Benjamin Dupont**

**Institut Camille Jordan, Université Lyon 1**

**Séminaire de mathématiques, Université de Reims**

**13 Octobre 2020**

# Outline

---

I. La théorie de la réécriture

II. Réécriture dans des 2-catégories linéaires

III. Extension à la réécriture modulo

# I. La théorie de la réécriture

# Rewriting theory

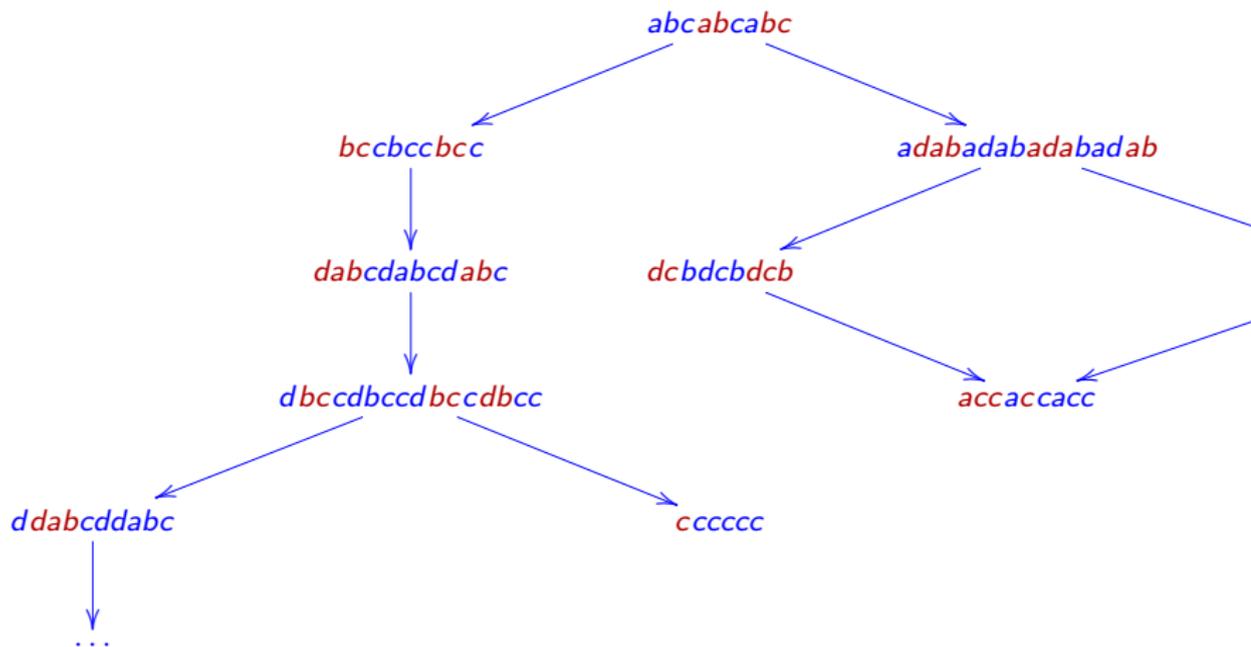
---

- ▶ La réécriture est une théorie du calcul par orientation de relations.
- ▶ Réécriture algébrique: déduire des propriétés de structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.
  - ▶ Calcul de syzygies, i.e relations entre les relations, et d'invariants homologiques.
  - ▶ Calcul de bases linéaires.
  - ▶ Preuves de Koszulité d'algèbres.
  - ▶ Calcul de résolutions libres et de remplacements cofibrants, **Anick '84**.
- ▶ Des outils de réécriture ont été développés dans divers contextes: réécriture de mots (**Thue**), algèbre universelle (**Knuth-Bendix '70**), algèbres commutatives (**Buchberger '65**), algèbres associatives (**Bokut '76**, **Bergman '78**, **Mora '86**), opérades (**Dotsenko-Khoroshkin '10**), catégories de dimension supérieure. (**Guiraud-Malbos '09**).
- ▶ **Objectifs** : Développer des outils de réécriture pour étudier des algèbres et catégories diagrammatiques qui apparaissent en théorie des représentations.
  - ▶ **Khovanov-Lauda-Rouquier** (KLR) algebras which categorify quantum groups.
  - ▶ **Heisenberg** categorifications.
- ▶ **Problème** : Calcul de bases pour les espaces de morphismes.

# Réécriture de mots

► **Exemple:**  $X := \{a, b, c, d\}$  un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

$ab \rightarrow bc$ ,  $ab \rightarrow bc$ ,  $ada \rightarrow dc$ ,  $ada \rightarrow dc$ ,  $bc \rightarrow dab$ ,  $bc \rightarrow dab$ ,  $db \rightarrow c$ ,  $db \rightarrow c$ ,  $dcb \rightarrow acc$ .

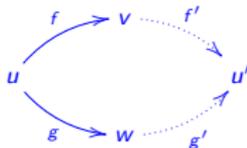


## Terminaison, formes normales et confluence

- ▶ Soit  $(X, R)$  un SRM et  $X^*$  le monoïde libre sur  $X$ . Une **étape de réécriture** de  $(X, R)$  est une réduction

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{u} \quad \begin{array}{c} \text{---} s(f) \text{---} \\ \downarrow f \\ \text{---} t(f) \text{---} \end{array} \quad \xrightarrow{v} \end{array} \quad \text{où } u, v \in X^* \text{ et } f : s(f) \rightarrow t(f) \in R.$$

- ▶ Un mot  $x$  de  $X^*$  est **normal form** si il n'existe pas  $y$  dans  $X^*$  tel que  $x \rightarrow y$ .
- ▶  $(X, R)$  **termine** si il n'existe pas de suite infinie de réécriture pour  $(X, R)$ .
- ▶ Si  $(X, R)$  termine, chaque élément  $x \in X^*$  admet au moins une forme normale.
- ▶ Un **branchement** (resp. **branchement local**) de  $(X, R)$  est:



où  $f$  et  $g$  sont des suites de réécriture (resp. étapes de réécriture) et  $u, v, w \in X^*$ .

- ▶ Un branchement (local) est **confluent** si il existe des suites de réécriture comme ci-dessus.

# Confluence et branchements critiques

---

- ▶ Si  $(X, R)$  est **confluent**, chaque élément  $x \in X^*$  admet au plus une forme normale.
- ▶ **Théorème (Lemme de Newman)** : Si  $(X, R)$  termine, alors la confluence est équivalent à la confluence locale.
- ▶ Les branchements locaux sont ordonnés par  $(f, g) \sqsubseteq (ufv, ugv)$  pour  $u, v \in X^*$ . Un **branchement critique** est un branchement minimal pour  $\sqsubseteq$ .
- ▶ Il y a deux formes de branchements critiques:



- ▶ **Théorème (Lemme des branchements critiques)**:  $(X, R)$  est localement confluent si et seulement si tous ses branchements critiques sont confluents.

# Résolution du problème du mot

---

- ▶ Soit  $M$  un monoïde présenté par générateurs  $X$  et relations  $R$ , i.e.

$$M \simeq X / \equiv_R,$$

c'est à dire  $u = v$  dans  $M$  ssi  $\bar{u} \stackrel{R}{\leftrightarrow} \bar{v}$  in  $X^*$  pour des représentants  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  de  $u$  et  $v$  dans  $X^*$ .

- ▶ **Problème du mot** : étant donnés  $u$  et  $v$  dans  $X^*$ , est-ce que  $u = v$  dans  $M$  ?
- ▶ **Réponse partielle**: Si pour une orientation des relations de  $R$ , le SRM  $(X, R)$  est convergent, ce problème est décidable via l'**algorithme de la forme normale**.

**Entrée:**  $u, v \in X^*$

**Result:** Booléen  $u = v$  in  $M$  ?

Réduire  $u$  en  $\hat{u}$  ;

Réduire  $v$  en  $\hat{v}$  ;

**if**  $\hat{u} = \hat{v}$  **then**

|  $u = v$  dans  $M$ .

**else**

|  $u \neq v$  dans  $M$ .

**end**

# Exemples

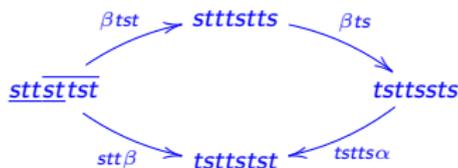
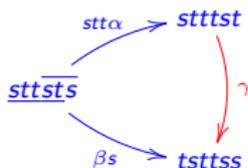
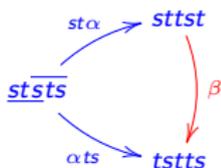
**Exemple.**  $X = \{a\}$  et  $R = \{aa \xrightarrow{\alpha} 1\}$ .

- ▶ Terminaison: le nombre de  $a$  est strictement décroissant.
- ▶ Il y a un branchement critique, qui est confluent.



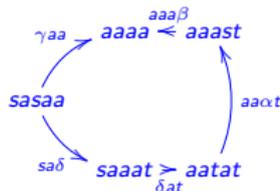
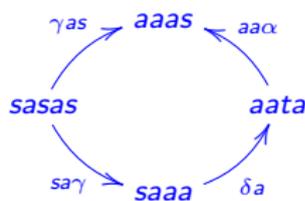
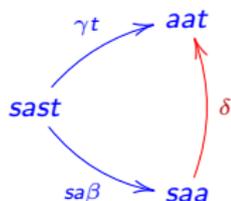
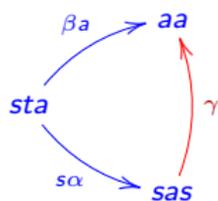
**Exemple.**  $X = \{s, t\}$  et  $R = \{sts \xrightarrow{\alpha} tst\}$ .  $s = \square$   $t = \square$   $\square = \square$

- ▶ Terminaison: via un ordre degré lexicographique avec  $s > t$ .
- ▶ Un branchement critique non confluent :



# Exemples

- ▶ Ce processus, appelé **complétion de Knuth-Bendix** peut ne pas terminer. Lorsqu'il termine, il renvoie un système convergent présentant le même monoïde.
- ▶ **Kapur & Narendran**, '85:  $B_3^+$  n'admet pas de présentation convergente finie avec 2 générateurs.
- ▶  $X = \{s, t, a\}$  et  $R = \{ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a\}$  présente le même monoïde. Il termine pour l'ordre degré lexicographique donné par  $s > t > a$ .



- ▶ Le SRM  $\langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \rangle$  est une présentation convergente de  $B_3^+$ .

### III. Réécriture dans des 2-catégories linéaires.

# Présentations diagrammatiques

► On s'intéresse à des structures présentées par générateurs et relations diagrammatiques.

► **Exemple:** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , l'algèbre nil Hecke  $\mathcal{NH}_n$  de degré  $n$  est présentée par

► générateurs  $\xi_i$  pour  $1 \leq i \leq n$  et  $\partial_i$  for  $1 \leq i < n$ ;

$$\xi_i = \begin{array}{c} | \quad \dots \quad | \quad \dots \quad | \\ \mathbf{1} \quad \quad i \quad \quad n \end{array}, \quad \partial_i = \begin{array}{c} | \quad \dots \quad | \quad \dots \quad | \\ \mathbf{1} \quad \quad i \quad \quad i+1 \quad \quad n \end{array}$$

► relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i \quad \xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1 \quad \partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

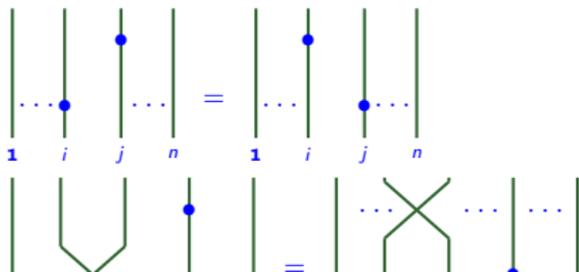
$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1 \quad \partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0 \quad \partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1} \quad \partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

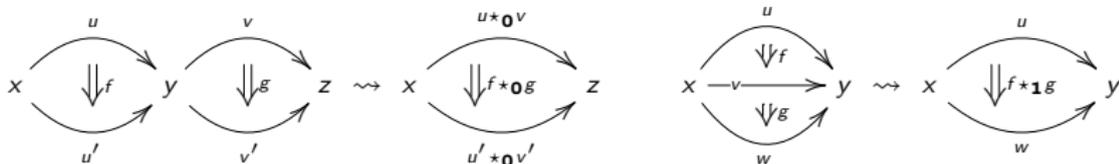
$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1 \quad \xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1 \quad \partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$



# Linear monoidal categories and linear 2-categories

- ▶ Une **catégorie monoïdale  $\mathbb{K}$ -linéaire** est une catégorie  $\mathcal{A}$  munie:
  - ▶ un produit tensoriel  $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  associatif.
  - ▶ un objet unité  $\mathbb{1}$  tel que  $\mathbb{1} \otimes A = A = A \otimes \mathbb{1}$  pour tout objet de  $\mathcal{A}$ .
  - ▶ une structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour chaque espace de morphismes  $\mathcal{A}(A, B)$ .
  - ▶ la composition et le produit tensoriel de morphismes sont  $\mathbb{K}$ -bilinéaires.
- ▶ Une  **$\mathbb{K}$ -2-catégorie linéaire** est la donnée d'une 2-catégorie  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$  telle que:
  - ▶ pour tous  $p, q$  dans  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2(p, q)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
  - ▶  $\star_0$  et  $\star_1$ -composition de 1-cellules sont  $\mathbb{K}$ -bilinéaires.



- ▶ Lorsque  $\mathcal{C}_0 = \{*\}$ , ces deux objets sont similaires.

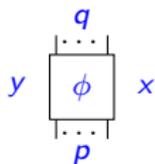
objets de  $\mathcal{A} \leftrightarrow$  1-cellules de  $\mathcal{C}$

morphismes de  $\mathcal{A} \leftrightarrow$  2-cellules de  $\mathcal{C}$

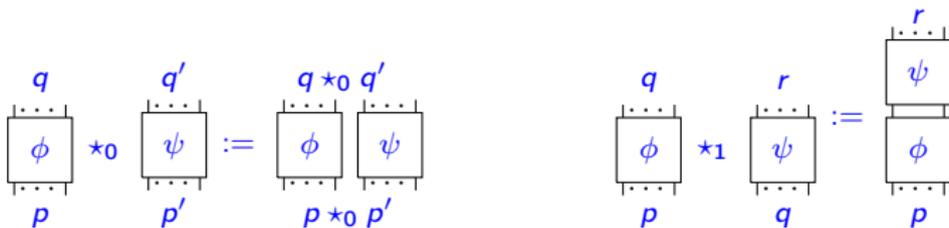
$\otimes \leftrightarrow \star_0$ ,      composition de morphismes  $\leftrightarrow \star_1$

# Diagrammes de cordes

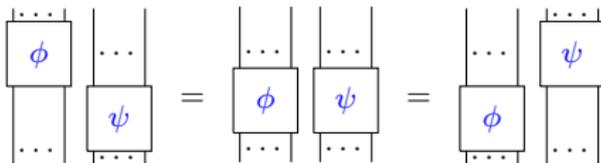
- ▶ Une 2-cellule  $\phi : p \Rightarrow q$  avec  $p, q : x \rightarrow y$  d'une 2-catégorie (linéaire)  $\mathcal{C}$  peut être représentée par un **diagramme de corde**:



- ▶ Compositions:



- ▶ Ces compositions satisfont les **relations d'échange**:



# Présentations par des $(3, 2)$ -polygraphes linéaires

- ▶ Les polygraphes (**Burroni - Street**) sont des systèmes générateurs adaptés aux présentations de catégories globulaires strictes.
  - ▶ Les 2-catégories sont présentées par des systèmes de réécriture appelés  **$(3, 2)$ -polygraphes linéaires**.

▶ Un 1-polygraphe est un graphe orienté  $(P_1, P_0, s_0, t_0)$ , sur lequel on construit la 1-catégorie libre  $P_1^*$ .

▶ On considère une **extension cellulaire**  $P_2$  de  $P_1^*$ , c'est à dire un ensemble muni de  $s_1, t_1: P_2 \rightarrow P_1^*$ .

▶ On construit la 2-catégorie libre  $P_2^*$  sur  $P_2$ .

▶ On étend en la 2-catégorie linéaire libre  $P_2^\ell$  sur  $P_2$ :

$$P_2^\ell(x, y) = \mathbb{K}[P_2^*(x, y)]$$

pour toutes 1-cellules  $x$  et  $y$  de  $P_2^*$ .

▶ On considère une extension cellulaire  $P_3$  de  $P_2^\ell$ , fixant une orientation des relations.

$$P_0 = \{*\}, P_1 = \{1\}, \star_0 = +, P_1^* = \mathbb{N},$$

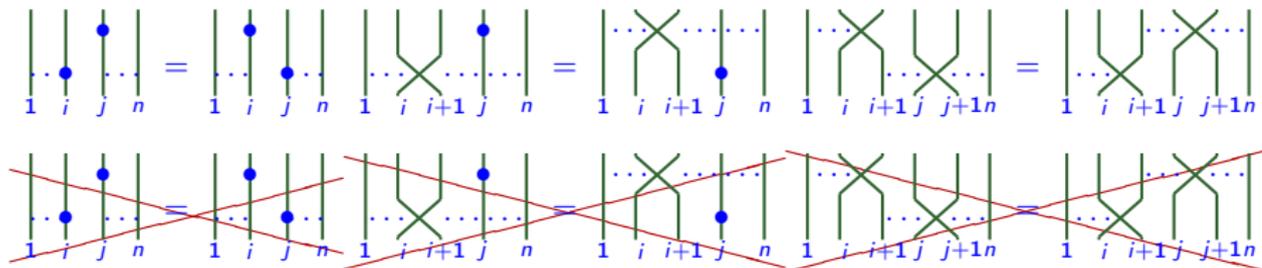
$$P_2 = \left\{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} : 2 \rightarrow 2, \quad \bullet : 1 \rightarrow 1 \right\}$$

▶  $P_2^* = \{ \text{diagrammes formés de compositions horizontales et verticales de croisements et points} \}$

▶  $P_2^\ell = \{ \mathbb{K} - \text{combinaisons linéaires de diagrammes de } P_2^* \}$

# Presentations by linear $(3, 2)$ -polygraphs

► **Example** : Pour les algèbres nil Hecke,



► Ce sont des relations d'échange.

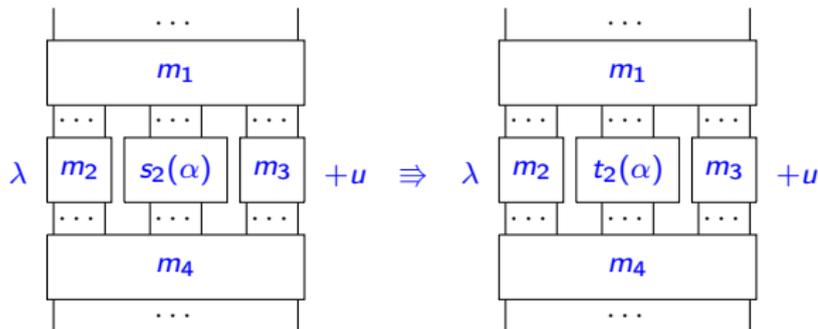


► Ce choix d'orientation définit un  $(3, 2)$ -polygraphe linéaire présentant une 2-catégorie linéaire qui encode les algèbres nil Hecke:

$$\text{End}_{\mathcal{C}}(n) \simeq \mathcal{NH}_n$$

# Réécriture linéaire

- ▶ Le contexte linéaire impose une restriction sur les réécritures autorisées : si  $u \rightarrow v$ , alors  $-u \Rightarrow -v$ , et donc  $v = (u + v) - u \Rightarrow \cancel{u} + v - v = u$ .
- ▶ Une **étape de réécriture** d'un  $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est une 3-cellule de la forme

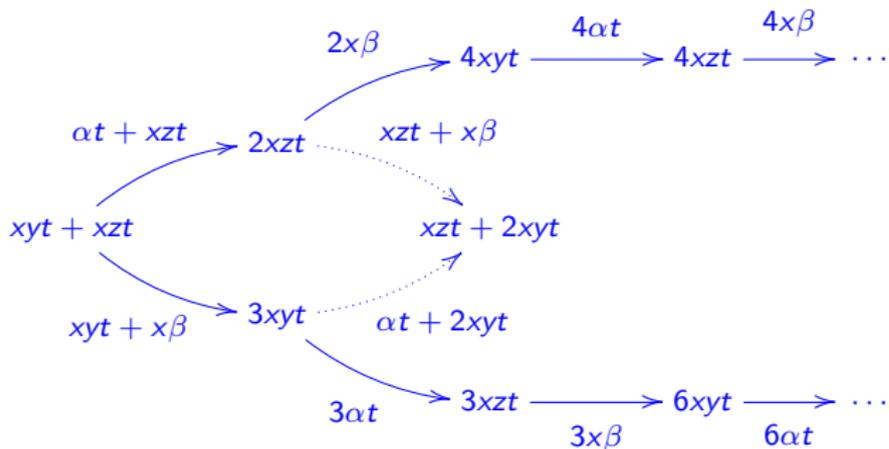


où  $\alpha \in P_3$ , et t.q. le monome  $m_1 \star_1 (m_2 \star_0 s_2(\alpha) \star_0 m_3) \star_1 m_4$  n'apparaît pas dans la décomposition en monomes de  $u$ .

- ▶ **Lemme de Newman**: Un  $(3, 2)$ -polygraphe linéaire terminant est confluent ssi il est localement confluent.
- ▶ **Lemme des branchements critiques**: Un  $(3, 2)$ -polygraphe linéaire **terminant** est localement confluent ssi ses branchements critiques sont confluents.

# Réécriture linéaire sans terminaison

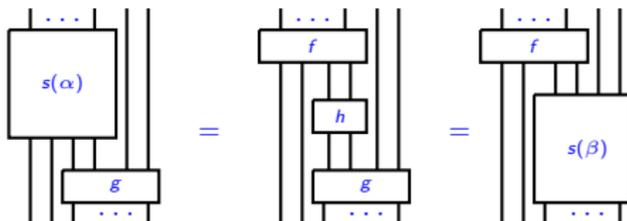
- ▶ Considérons un système de réécriture linéaire sur les générateurs  $x, y, z$  et relations  $\alpha : xy \rightarrow xz$  et  $\beta : zt \rightarrow 2yt$ .
- ▶ Il n'a pas de branchement critique.
- ▶ Considérons le branchement "additif" :



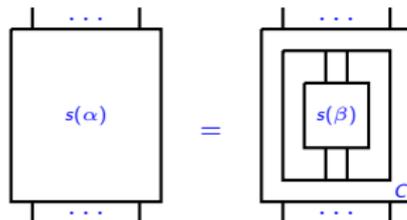
# Branchements critiques de $(3, 2)$ -polygraphes linéaires.

- ▶ Un branchement critique est un branchement sur un diagramme de corde "minimal".
- ▶ Il y a 3 formes différentes de branchements critiques:

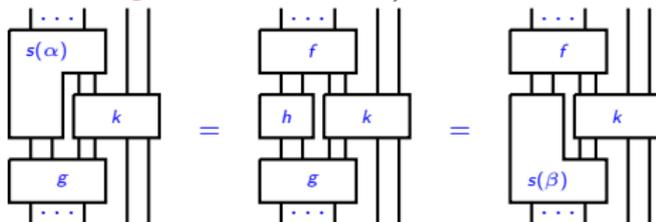
▶ Réguliers:



▶ Inclusion:



▶ Indexés à droite (où indexés à gauche, multi-indexés):



# Calcul de bases linéaires

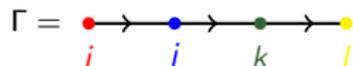
---

- ▶  $P$  a convergent left-monomial linear  $(3, 2)$ -polygraph.
- ▶  $\mathcal{C}$  the linear 2-category it presents.
- ▶ **Theorem (Alleaume):** For any parallel 1-cells  $p$  and  $q$  of  $\mathcal{C}$ , the set of monomials in normal form for  $P$  with 1-source  $p$  and 1-target  $q$  is a linear basis of  $\mathcal{C}_2(p, q)$ .
  - ▶ Termination: the monomials in normal form span  $\mathcal{C}_2(p, q)$ .
  - ▶ Confluence: if a 2-cell reduces into two different linear combinations of monomials in normal form, they are equal by confluence and since  $P$  is left-monomial.

## Example: the Khovanov-Lauda-Rouquier (KLR) algebras

---

- ▶ These algebras have been defined in the process of categorifying a quantum group  $U_q(\mathfrak{g})$  associated with a symmetrizable Kac-Moody algebra  $\mathfrak{g}$ .
- ▶ Let  $\Gamma$  be the Dynkin graph of  $\mathfrak{g}$ , and  $I$  its set of vertices, seen as colors. For example,



- ▶ Fix an element  $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i \cdot i \in \mathbb{N}[I]$  and consider the set  $\text{Seq}(\mathcal{V})$  of sequences of length  $m$  of elements of  $\Gamma$ , where  $i$  appears  $\nu_i$  times.
  - ▶ **Example:**  $\text{Seq}(2i + k) = \{iik, iki, kii\}$
- ▶ From such a  $\mathcal{V}$ , we define an algebra  $R(\mathcal{V})$ .

- ▶ **Theorem [Khovanov-Lauda '08]:** If  $R = \bigoplus_{\mathcal{V} \in \mathbb{N}[I]} R(\mathcal{V})$ ,

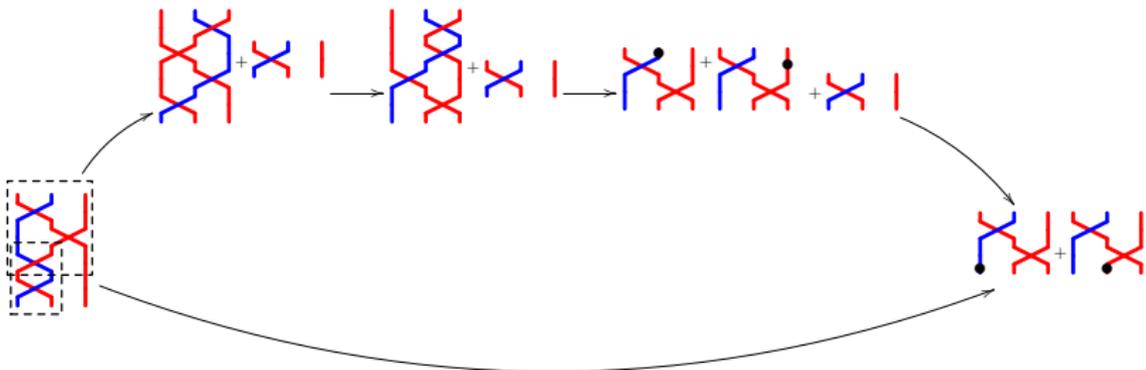
$$K_0(R - \text{pmod}) \simeq \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$$



# Convergent presentation

► **Theorem [D. '17]:** This linear  $(3, 2)$ -polygraph is convergent.

- Termination: the number of crossings decreases, permutations are left adjusted and the dots move to the bottom.
- Confluence: exhaustive study of all critical branchings.



► **Corollary:** Diagrams corresponding to minimal permutations in the Coxeter presentation of the symmetric groups and dots placed at the bottom of each strand give bases of these algebras.

## IV. Extension to rewriting modulo

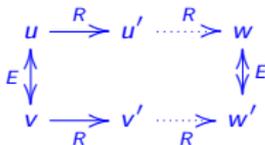
# Rewriting modulo

- Some structural relations may make the analysis of confluence difficult.
  - Example:** Adjunction relations in pivotal linear 2-categories. If  $p$  is a 1-cell, a left-adjoint of  $p$  is a 1-cell  $\hat{p}$  such that there are 2-cells

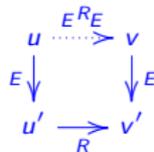
$$\eta_p : 1 \Rightarrow p \circ \hat{p}, \quad \varepsilon_p : \hat{p} \circ p \Rightarrow 1, \quad \text{curly } \hat{p} \text{ and } p \text{ satisfying } \text{cup} = \text{cap} = \text{line}.$$

- We rewrite modulo these rules, with a set  $R$  of oriented relations and a set  $E$  of non-oriented axioms.
- Three paradigms of rewriting modulo:

- Rewriting with rules in  $R$ , but confluence modulo  $E$ , Huet '80



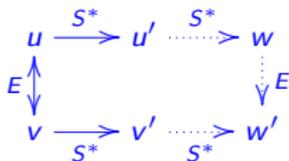
- Rewriting with  $R$  on  $E$ -equivalence classes:



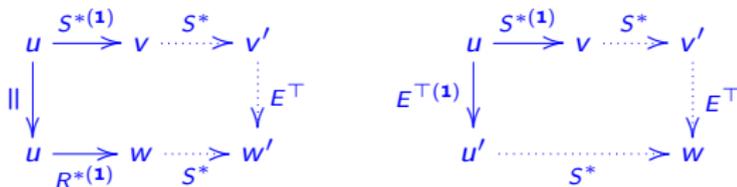
- Rewriting system modulo:  $(R, E, S)$  such that  $R \subseteq S \subseteq E R E$ , Jouannaud-Kirchner '84.

# Results

- **Confluence modulo:**



- **Theorem [D. - Malbos '18], Critical pair lemma modulo :** For  $(R, E, S)$  such that  ${}_E R_E$  is terminating,  $S$  is confluent modulo  $E$  if and only if its critical branchings modulo  $E$  of the form



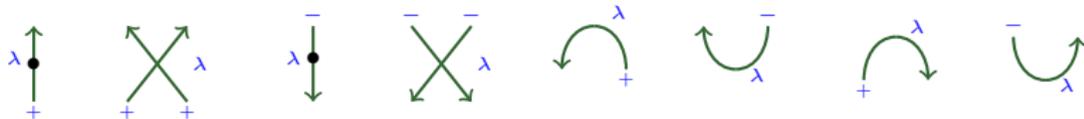
are confluent modulo  $E$ .

- **Theorem [D. '19]** Let  $(R, E, S)$  be a linear  $(3, 2)$ -polygraph modulo and  $\mathcal{C}$  the category presented by  $R \amalg E$ , such that  $S$  is terminating and confluent modulo  $E$ .

Then, for all parallel 1-cells  $p$  and  $q$ , the set of monomials in the  $E$ -normal forms of monomials in normal form for  $S$  gives a basis of  $\mathcal{C}_2(p, q)$ .

## Example: The 2-category $\mathcal{KLR}(\mathfrak{sl}_2)$

- ▶ Let  $\mathcal{KLR}$  be the linear 2-category defined by:
  - ▶  $\mathcal{KLR}_0 = X$  weight lattice of a Kac-Moody algebra,
  - ▶  $\mathcal{KLR}_1 = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\ell(\underline{\varepsilon})}) \text{ with } \varepsilon_i \in \{-, +\}\}$ .
  - ▶  $\mathcal{KLR}_2$  is the set of following generating 2-cells



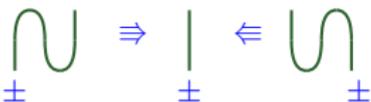
- ▶ subject to the following relations:

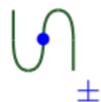
- ▶ KLR algebras relations for both orientations.
- ▶ Bubble relations:

$$n \circlearrowleft \lambda \Rightarrow \begin{cases} 1_{\lambda} & \text{if } n = h - 1 \\ 0 & \text{if } n < h - 1 \end{cases} ; \quad \lambda \circlearrowright n \Rightarrow \begin{cases} 1_{\lambda} & \text{if } n = -h - 1 \\ 0 & \text{if } n < -h - 1 \end{cases}$$

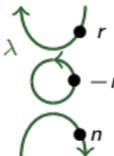
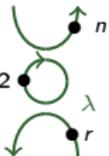
$$h-1+\alpha \circlearrowleft \lambda \Rightarrow - \sum_{l=1}^{\alpha} h-1+\alpha-l \circlearrowleft \lambda \circlearrowright h-1+l \quad \text{for all } \lambda \in X \text{ and } \alpha > 0$$

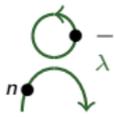
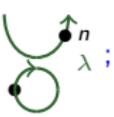
## Example: The 2-category $\mathcal{KLR}(\mathfrak{sl}_2)$

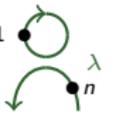
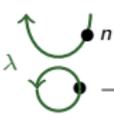
► Isotopy relations:   $\Rightarrow$    $\Leftarrow$  

  $\Rightarrow$    $\Leftarrow$  

► Quantum relations:

  $\Rightarrow -\uparrow\downarrow\lambda + \sum_{n=0}^{h-1} \sum_{r \geq 0} \lambda$    $-n-r-2$  ;   $\Rightarrow -\downarrow\uparrow\lambda + \sum_{n=0}^{-h-1} \sum_{r \geq 0} -n-r-2$    $\lambda$

  $\Rightarrow \sum_{n=0}^h \lambda$    $-n-1$  ;   $\Rightarrow -\sum_{n=0}^{-h} -n-1$    $\lambda$  ;

  $\Rightarrow -\sum_{n=0}^{-h} -n-1$    $\lambda$  ;   $\Rightarrow \sum_{n=0}^h \lambda$    $-n-1$  .

► Bubble slide relations.