Fondements de la Logique positive

Itaï BEN YAACOV[1a] & Bruno POIZAT[2b]

On me l'a toujours dit
La nuit les chats sont gris
Gris comme les souris
Pardi !

Ne sois pas étonnée
Moi qui suis ton minet
Ma couleur a changé
Aussi

Je suis sorti ce soir
Et je rentre un peu noir
Sois pas au désespoir
Bonsoir !

C'est ta faute après tout
Puisque tu dis partout
Que j'suis ton gros matou
Miaou !

Emile Prudhomme

Abstract. We revisit the foundations of positive model theory, introducing *h-inductive sentences*. These allow a considerably simplified presentation of positive model theory, as well as a characterisation of Hausdorff cats by an amalgamation property of their h-inductive theory.

Introduction

La Logique positive est le fragment de la Logique du premier ordre qui n'utilise pas la négation ; sa théorie des modèles consiste en l'étude des classes des modèles existentiellement clos de certaines théories universelles. Grâce au procédé dit de "morlèisation positive", elle apparaît comme une généralisation de la théorie des modèles classique (ou, plus exactement, de la théorie des

1 Le premier auteur est partiellement soutenu par NSF Grant DMS-0500172.
a University of Wisconsin – Madison Mathematics Department, Van Vleck Hall, 480 Lincoln Drive, Madison, WI 53706, États-Unis
2 'al-mu'allif 'al-t̲âni kataba nusxah 'ibtida'iyah li-hadihi 'il-maqalah baynamâ kâna Dayfa jâma&at 'il-ruH 'il-muqaddas fî 'il-kaslik, lubnân.
b Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne-cedex, France

modèles devenue classique à partir des années 1970), où l'on étudie les classes des modèles de théories complètes.

Il s'agit d'une généralisation véritable, car il a été amplement montré dans [Ben-Yaacov 2003bis, 2003ter, 2004, 2005] que la Logique positive pouvait continuer à exprimer des faits dans des contextes ou la Logique du premier ordre, avec emploi libre de la négation, n'avait plus rien à dire.

La notion de modèle existentiellement clos est centrale dans les travaux d'Abraham Robinson, le père de la Théorie des modèles (il lui a donné son nom), ainsi que la notion de théories inductives modèle-compagnes : deux telles théories ont les mêmes modèles existentiellement clos, et les mêmes modèles existentiellement clos que la théorie formée de leurs conséquences universelles ([Robinson 1956]).

Le premier auteur du présent article, en exposant la Logique positive, n'a jusqu'à présent mentionné que les théories universelles. Nous nous sommes rendu compte qu'il était possible de simplifier considérablement cette exposition en introduisant des théories inductives (il faut préciser ce qu'on entend par là, dans le cadre de la Logique positive), principalement parce que la morlèisée d'une théorie inductive est inductive, alors que la morlèisée d'une théorie universelle n'est pas universelle.

Nous avons donc écrit cet article dans le but de faciliter à nos lecteurs l'accès aux principes de la Logique positive, ce qui nous a conduit à récapituler positivement l'histoire des fondements de la Théorie des modèles depuis ses origines : outre les travaux de Robinson, nous mentionnons ceux de Fraïssé et de Jonsson sur les domaines universels, ainsi que la morlèisation introduite par Morley et Vaught en 1962 pour définir, dans un cadre technique qui est de façon surprenante très semblable au nôtre, le lebensraum contemporain de la Théorie des modèles ; nous mentionnons aussi les travaux de Kaiser sur les théories inductives compagnes. Nous avons même trouvé de l'inspiration dans les résultats moins connus de Tölendi Mustafin à propos des théories de Jonsson. Tout ceci aboutit aux précurseurs modernes de la Logique positive, [Hrushovski 1997] et [Pillay 2000], qui n'ont toutefois pas pris une mesure aussi radicale que celle de renoncer à la négation, comme cela avait été suggéré dès [Shelah 1975].

Cela nous a posé un problème de rédaction ; comme une part de ce que nous disons n’est que l'adaptation positive de résultats connus (non seulement en

Théorie des modèles, mais aussi en Algèbre Universelle), nous aurions pu inviter notre lecteur à reprendre lui-même tous les travaux de Robinson, et de ses successeurs, en y remplaçant la notion de plongement par celle d'homomorphisme ; nous avons évité cette voie, craignant les incompréhensions dues à la plus grande généralité de la Logique positive : on y voit apparaître des situations vraiment nouvelles. Nous avons donc tout redémontré à partir du début, en nous permettant parfois des démonstrations elliptiques.

Nous avons même fait semblant d'ignorer le Théorème de compacité de la Logique du premier ordre, que nous redémontrons en reprenant [Ben-Yaacov 2003]. La nouvelle démonstration que nous présentons ici est un corollaire direct du théorème classique sur l'existence d'existentiellement clos dans les classes inductives (dans notre démonstration du Théorème de compacité, l'Axiome de choix n'est utilisé que pour établir cette existence), et nous n'avons pu résister au plaisir de faire partager à nos lecteurs sa lumineuse simplicité.

Quand on fait le détour par la Logique positive, le Théorème de compacité de la Logique du premier ordre devient d'une évidence telle qu'on le démontre sans même s'en apercevoir. Il serait même possible de ne jamais le mentionner, en remplaçant tous ses emplois par la considération de modèles existentiellement clos de théories inductives convenablement choisies.

Tous nos résultats sur les théories inductives en Logique positive sont originaux, et il en est un qui n’a pas de précédent historique : notre Théorème 20, caractérisant les chats de Hausdorff par la propriété d’amalgamation de la classe des modèles de leur théorie inductive.

Nous espérons enfin que cet article sera utile à la communauté des logiciens en permettant au plus grand nombre de se familiariser avec le français mathématique.

Logique positive : les définitions de base

Nous considérons un langage L dont la signature ne comprend que des symboles de relation et de constante individuelle. Nous pourrions introduire dès à présent des fonctions dans la signature, ce qui ne causerait que de très légères complications dans la démonstration du Théorème de compacité ; nous avons préféré ne le faire qu'au début du chapitre final, sur la morlèisation. La présence de constantes individuelles est par contre indispensable, car il est dans l'essence même de la Logique du premier ordre, où les individus sont quantifiés, de pouvoir faire passer ces derniers d'un état de variable à un état de constante, et réciproquement.

Une L-structure est, comme d'habitude, la donnée d'un ensemble M non-vide, et d'une interprétation des symboles de relation de L par des relations d'arité prescrite entre éléments de M , ainsi que d'une interprétation des constantes de L par des éléments de M . Le langage contient un symbole de relation binaire = , qui doit être interprété par l'égalité.

En prévision de la morlèisation, nous admettons dans la signature les relations 0-aires, c'est-à-dire les constantes propositionnelles, qui sont interprétées par le vrai ou bien par le faux dans une structure donnée. Nous exigeons même que le langage comprenne un symbole 0-aire spécifique $\perp$ pour représenter l'antilogie. Nous pouvons exprimer la tautologie par $x = x$, ou par $(\exists x)\ x = x$, mais ce symbole $\perp$ nous est indispensable pour définir positivement l'ensemble vide.

Les formules positives sont celles qu'on obtient à partir des formules atomiques grâce à l'emploi des symboles $\wedge$, $\vee$, $\exists$; leur sémantique est usuelle ; une fois mise sous forme prénexe, une formule positive s'écrit comme un bloc de quanteurs existentiels devant une formule libre positive ; on peut écrire cette dernière sous forme disjonctive, c'est-à-dire comme une disjonction de conjonctions de formules atomiques. Pour obtenir les formules les plus générales du langage du premier ordre, il faut en outre utiliser le symbole $\neg$.

En Logique positive stricte on ne considère que des formules positives (et en particulier les ensembles définissables dans une structure donnée le sont positivement), si ce n'est quelques énoncés qui font un usage modéré de la négation. Le diagramme positif d'une L-structure M est l'ensemble des énoncés atomiques satisfait par M , dans le langage L(M) obtenu en ajoutant à L de nouveaux symboles de constante pour nommer les individus de M .

On rappelle qu'un plongement p d'une L-structure M dans une L-structure N est une application de la base de M dans la base de N telle que, pour tout $\underline{a}$ de M , $\underline{a}$ et $p(\underline{a})$ satisfont les mêmes formules atomiques. Si M est inclus dans N , et si cette inclusion est un plongement, on dit que N est une extension de M , et que M est une restriction (ou une sous-structure) de N .

Mieux adaptés à la Logique positive sont les homomorphismes, ainsi définis : un homomorphisme de la L-structure M dans la L-structure N est une application h de la base de M dans la base de N telle que, pour tout uple $\underline{a}$ extrait de M, toute formule atomique satisfaite par $\underline{a}$ l'est aussi par $h(\underline{a})$. Comme il est possible que $h(\underline{a})$ satisfasse plus de formules atomiques que $\underline{a}$, un homomorphisme n'est pas nécessairement injectif. S'il existe un homomorphisme de M dans N, on dit que N est une continuation de M, que N continue M, et que M précède N.

On remarque que si h est un homomorphisme de M dans N, toute formule (existentielle) positive satisfaite par $\underline{a}$ dans M est satisfaite par $h(\underline{a})$ dans N. Si on a la réciproque, c'est-à-dire si, pour tout $\underline{a}$ de M, $\underline{a}$ dans M et $h(\underline{a})$ dans N satisfont les mêmes formules positives, on dit que l'homomorphisme h est une immersion. Une immersion est bien sûr un plongement.

Si M est inclus dans N et que cette inclusion est une immersion, on pourrait dire que M est existentiellement clos dans N ; cette notion d'existentiellement clos ne serait pas la même que celle de Robinson, puisque nous ne considérons que des formules existentielles positives.

Il est clair que le composé de deux homomorphismes est un homomorphisme, et que la composée de deux immersions est une immersion.

Par ailleurs, les homomorphismes comme les immersions ont des limites inductives, qui sont définies comme suit.

On considère une famille de L-structures M_i, indexée par un ensemble totalement ordonné I, avec pour chaque couple $i \leq j$ un homomorphisme h_{ji} de M_i dans M_j ; on suppose que chaque h_{ii} est l'application-identité, et que si $i \leq j \leq k$, $h_{kj} \circ h_{ji} = h_{ki}$. On définit alors sur la réunion disjointe A des M_i la relation d'équivalence E suivante : a dans M_i est équivalent à b dans M_j si on peut trouver k supérieur à i comme à j tel que $h_{ki}(a) = h_{kj}(b)$. La limite inductive M des structures M_i est définie sur l'ensemble A/E ; une formule atomique y est satisfaite par un uple si elle y est satisfaite par les représentants de ce uple dans un même M_i (et en fait dans tous les M_i pour i assez grand).

L'application canonique h_i de M_i dans M est un homomorphisme. Si $i \leq j$, $h_i = h_j \circ h_{ji}$. On voit facilement que, si chacun des h_{ij} est une immersion, il en est de même des h_i.

Nous dirons qu'une classe de structures est inductive si elle est close par limite inductive d'homomorphismes. Nous dirons qu'un élément M de la classe de L-structures Γ est (positivement) existentiellement clos dans Γ si tout homomorphisme de M dans un quelconque élément de Γ est une immersion.

Théorème 1. *Dans une classe inductive, tout élément se continue en un existentiellement clos.*

Démonstration. La démonstration est classique, à ceci près qu'il faut remplacer les plongements par des homomorphismes. Soit donc M un élément de la classe inductive Γ ; nous énumérons ordinalement les formules positives $(\exists \underline{y})\, f(\underline{a},\underline{y})$ à paramètres $\underline{a}$ dans M ; si la première est satisfaite dans une continuation de M, nous prenons pour N_1 une telle continuation, et sinon $N_1 = M$; si la seconde est satisfaite dans une continuation de N_1 nous prenons pour N_2 une telle continuation, et sinon $N_2 = N_1$; on répète transfiniment, en prenant la limite inductive aux étapes limites, pour obtenir une structure M_1 telle que, si l'une de ces formules à paramètres dans M est satisfaite dans une continuation de M_1, elle est satisfaite dans M_1. On répète oméga fois. **Fin**

Comme d'habitude, un énoncé est une formule sans variables libres.

Un énoncé est dit h-universel si c'est la négation d'un énoncé positif ; il est donc de la forme $\neg (\exists \underline{x})\, f(\underline{x})$, soit encore $(\forall \underline{x}) \neg f(\underline{x})$, où $f(\underline{x})$ est libre et positive. Un énoncé h-universel exprime la vacuité d'un certain ensemble positivement définissable. La conjonction de deux énoncés h-universels est équivalente à un énoncé h-universel ; en effet $\neg (\exists \underline{x})\, f(\underline{x}) \wedge \neg (\exists \underline{y})\, g(\underline{y})$ se met sous la forme $\neg (\exists \underline{x},\underline{y})\, f(\underline{x}) \vee g(\underline{y})$. De même, la disjonction de deux énoncés h-universels est h-universelle.

La lettre h est pour "homomorphisme" ; nous avons appelé ainsi ces énoncés d'abord parce qu'il était difficile de les appeler "énoncés universels positifs", et ensuite parce que, si un tel énoncé est vrai dans un prolongement de M , il est vrai dans M ; nous verrons dans la dernière section (Lemme 21) que cette propriété caractérise ces énoncés parmi tous ceux de la Logique du premier ordre (avec négation).

Un énoncé est dit h-inductif simple s'il est de la forme $(\forall \underline{x})\ f(\underline{x}) \rightarrow g(\underline{x})$ où f et g sont (existentielles) positives ; plus précisément, il s'écrit $(\forall \underline{x})\ [\ (\exists \underline{y})\ f(\underline{x},\underline{y}) \rightarrow (\exists \underline{z})\ g(\underline{x},\underline{z})\ ]$, où f et g sont libres et positives ; sous forme prénexe il devient $(\forall\underline{u})(\exists\underline{v})\ \neg\varphi(\underline{u}) \vee \psi(\underline{u},\underline{v})$, où φ et ψ sont libres et positives ; on voit donc que la disjonction de deux énoncés h-inductifs simples l'est aussi. Nous appellerons énoncé h-inductif une conjonction d'un nombre fini d'énoncés h-inductifs simples ; ces énoncés forment une famille close par disjonction et conjonction. Il est clair que la satisfaction d'un énoncé h-inductif se transmet aux limites inductives, c'est-à-dire que ses modèles forment une classe inductive ; nous verrons (Théorème 23) que cette propriété caractérise les énoncés h-inductifs parmi tous les énoncés du premier ordre.

On voit qu'un énoncé h-inductif simple exprime qu'un certain ensemble positivement définissable est inclus dans un autre.

Quand on prend pour φ la tautologie $u = u$, on voit qu'un énoncé de la forme $(\forall\underline{u})(\exists\underline{v})\ \psi(\underline{u},\underline{v})$, ou ψ est libre et positive, est h-inductif ; quand on prend pour ψ l'antilogie $\perp$, on voit qu'un énoncé h-universel est h-inductif.

Une théorie h-inductive est par définition un ensemble d'énoncés h-inductifs, qui sont appelés ses axiomes ; elle est dite h-universelle si elle ne contient que des axiomes h-universels. Elle est consistante si elle a un modèle, c'est-à-dire une structure satisfaisant chacun de ses axiomes.

Nous entendons la notion de conséquence en un sens sémantique : l'énoncé φ est conséquence de la théorie T s'il est satisfait dans tout modèle de T .

Logica vacuum abhorret : nous avons demandé que les structures aient des bases non vides, ce qui nous contraint d'admettre que l'énoncé $(\forall\ x)\ x \neq x$ est contradictoire ; la façon la plus économique de trouver un modèle à un axiome h-universel, c'est d'interpréter chaque symbole de relation par la relation vide ; le seul symbole que nous nous sommes interdits de traiter par ce remède de cheval est celui de l'égalité : en conséquence, une théorie h-universelle, dans un langage comprenant un ensemble C de constantes individuelles qu'on peut toujours supposer non vide (quitte à lui ajouter un élément), est consistante si et seulement si elle a pour modèle la structure de base C où ne sont satisfaites que les formules atomiques du type $c = c$. On voit qu'une théorie h-universelle est consistante pourvu que chacun de ses axiomes le soit.

Remarque. Le Théorème 1 est un équivalent de l'Axiome du choix. D'un côté, ce dernier est utilisé dans sa démonstration. Pour la réciproque, nous considérons un ensemble A non vide, et E une relation d'équivalence entre élément de A , ainsi que la théorie suivante, dans le langage comprenant un symbole de constante par élément de A et un prédicat $P(x)$: elle est constituée des axiomes $\neg (a = b)$ si a et b sont distincts, et $\neg (P(a) \wedge P(b))$ si a et b sont distincts et congrus modulo E ; cette théorie est h-universelle et consistante, et ses modèles existentiellement clos sont formés d'une copie de A munie d'un ensemble de choix pour E .

Compacité

Lemme 2. *Un ensemble d'énoncés h-universels ou atomiques est consistant pourvu que chacun de ses sous-ensembles finis le soit.*

Démonstration. Si une théorie est consistante, chacune de ses parties l'est aussi. Pour la réciproque, nous considérons un ensemble d'énoncés universel Tu , et un ensemble d'énoncés atomiques Ta , tels que chaque fragment fini de $Tu \cup Ta$ soit consistant ; il ne coûte rien de supposer que l'ensemble C des constantes individuelles mentionnées dans le langage L n'est pas vide. Sur C , nous considérons la relation d'équivalence E définie, par réflexivité, symétrie et transitivité, à partir des énoncés de la forme $c = c'$ qui figurent dans Ta . Sur le quotient C/E nous définissons une L-structure de la manière suivante : la formule $r(\gamma_1, .. \gamma_n)$ est satisfaite si on peut trouver des représentants $c_1 , \dots c_n$ de $\gamma_1 , \dots \gamma_n$ tels que l'énoncé $r(c_1, \dots c_n)$ figure dans Ta .

Cette structure est un modèle de Ta qui précède tous les autres, si bien que nous n'avons pas d'autre choix que de montrer que c'est un modèle de Tu . Si elle ne satisfaisait pas un certain énoncé $\neg (\exists \underline{x})\, f(\underline{x})$ de Tu , où f est positive libre, on y trouverait $\gamma_1, .. \gamma_n$ satisfaisant $f(\gamma_1, .. \gamma_n)$, ce qui serait dû à un certain fragment fini de Ta ; ce dernier serait contradictoire avec $\neg (\exists \underline{x}) f(\underline{x})$, ce qui contredit l'hypothèse. **Fin**

LEMME 3. *Soit* Ti *un ensemble d'énoncés h-inductifs, et soit* Tu *l'ensemble des énoncés h-universels qui sont conséquences d'un fragment fini de* Ti . *Alors, tout modèle existentiellement clos de* Tu *est modèle de* Ti .

Démonstration. Considérons un énoncé φ dans Ti , de la forme $(\forall \underline{x})\ [(\exists \underline{y}) f(\underline{x},\underline{y}) \rightarrow (\exists \underline{z})\ g(\underline{x},\underline{z})]$, où f et g sont libres positives ; g se met sous forme disjonctive $g = g_1 \vee ... \vee g_k$, où chaque g_i est conjonction de formules atomiques. Soit M un modèle existentiellement clos de Tu , et soit $\underline{a}$ un uple d'éléments de M qui ne satisfait pas $(\exists \underline{z})\ g(\underline{x},\underline{z})$; cela est aussi vrai pour l'image de $\underline{a}$ dans toute continuation de M qui soit modèle de Tu , ce qui signifie que, pour chaque g_i , la théorie formée de Tu , de $g_i(\underline{a},\underline{z})$ et du diagramme positif de M est inconsistante ; d'après le lemme 2, dans chaque cas un fragment fini de ce diagramme suffit à cette inconsistance, et on en déduit l'existence d'une formule libre positive $h(\underline{a},\underline{b})$ satisfaite dans M et incompatible avec $g(\underline{x},\underline{z})$ et un certain fragment fini Tu' de Tu ; autrement dit, Tu' implique $\neg (\exists \underline{x},\underline{z},\underline{u})\ g(\underline{x},\underline{z}) \wedge h(\underline{x},\underline{u})$, si bien que cet énoncé (h-universel) est conséquence d'un fragment fini Ti' de Ti , dans lequel on peut inclure φ .

Dans ces conditions, Ti' a pour conséquence $\neg (\exists \underline{x},\underline{y},\underline{u})\ f(\underline{x},\underline{y}) \wedge h(\underline{x},\underline{u})$, et comme ce dernier énoncé est h-universel, il fait partie de Tu , si bien que $\underline{a}$ ne peut satisfaire $(\exists \underline{y})\ f(\underline{x},\underline{y})$; autrement dit, M ne contient pas de contre-exemple à φ . **Fin**

Remarques. Les Lemmes 2 et 3 n'utilisent l'Axiome de choix sous aucune forme que ce soit. La version négationniste du Lemme 2 demanderait l'Axiome de l'ultrafiltre, pour faire une sélection entre les formules atomiques et leurs négations. Le Lemme 3 ne dit rien sur l'existence de modèles existentiellement clos, ni d'ailleurs sur la consistance des théories considérées.

COROLLAIRE 4 (COMPACITÉ). *Une théorie h-inductive est consistante pourvu que chacun de ses sous-ensembles finis le soit.*

Démonstration. Supposons que la théorie inductive Ti soit localement consistante ; il en est alors de même de la théorie Tu définie dans le Lemme 3 , qui est donc consistante ; ses modèles existentiellement clos, qui existent d'après le Théorème 1, sont modèles de Ti . **Fin**

Remarque. Si $\neg (\exists \underline{x}) f(\underline{x})$ est conséquence de Ti , c'est que $\{f(\underline{x})\} \cup$ Ti est inconsistante, si bien que $\neg (\exists \underline{x}) f(\underline{x})$ est conséquence d'un fragment fini de Ti . Autrement dit, Tu est formée des conséquences h-universelles de Ti .

De la compacité des théories h-inductives il est immédiat de déduire la compacité de toute la Logique du premier ordre, comme nous le verrons dans la section consacrée à la morlèisation. En attendant, nous n'utiliserons cette compacité que sous la version du Corollaire 4.

Modèles existentiellement clos

Lemme 5. *Soient Ti une théorie h-inductive, et Tu l'ensemble de ses conséquences h-universelles ; alors une structure se continue en un modèle de Ti si et seulement c'est un modèle de Tu .*

Démonstration. Si M se continue en un modèle de Ti , il est modèle de Tu . Supposons réciproquement que M soit modèle de Tu : il nous faut vérifier que la théorie formée de Ti et du diagramme positif de M est consistante. Si ce n'était pas le cas, par compacité Ti serait inconsistante avec un fragment fini $f(\underline{a})$ de ce diagramme, et, comme les constantes $\underline{a}$ ont été ajoutées au langage, $\neg (\exists \underline{x}) f(\underline{x})$ serait conséquence de Ti , et ferait partie de Tu , ce qui contredit l'hypothèse. **Fin**

Nous dirons que deux théories h-inductives sont compagnes si elles ont les mêmes conséquences h-universelles. D'après le lemme 5, cela signifie encore que tout modèle de l'une se continue en un modèle de l'autre.

Lemme 6. *L'ensemble des conséquences h-universelles d'une théorie h-inductive est la théorie h-universelle de ses modèles existentiellement clos.*

Démonstration. Si $\neg (\exists \underline{x}) f(\underline{x})$ n'est pas conséquence de Ti , on lui trouve un modèle avec un $\underline{a}$ satisfaisant $f(\underline{a})$, lequel se continue en un modèle existentiellement clos de Ti ne satisfaisant pas cet axiome. **Fin**

Lemme 7. *Deux théories h-inductives sont compagnes si et seulement si elles ont les mêmes modèles existentiellement clos.*

Démonstration. D'après le Lemme 6, deux théories h-inductives qui ont les mêmes modèles existentiellement clos sont compagnes. Pour la réciproque, il suffit de montrer qu'une théorie h-inductive Ti et sa compagne h-universelle Tu ont les mêmes modèles existentiellement clos. Nous avons vu (Lemme 3) qu'un modèle existentiellement clos de Tu est modèle de Ti , et il est bien sûr existentiellement clos parmi les modèles de Ti , qui forment une classe plus restreinte que ceux de Tu . Réciproquement, considérons un modèle existentiellement clos M de Ti , et soit h un homomorphisme de M dans un modèle N de Tu ; comme ce dernier se continue en un modèle de Ti , h est une immersion : M est bien existentiellement clos dans Tu . **Fin**

Une conséquence de tous ces lemmes, c'est qu'une théorie h-inductive Ti a une compagne maximale Tk , qui est la théorie inductive de ses modèles existentiellement clos ; les compagnes de Ti sont les théories inductives comprises entre sa compagne minimale Tu et sa compagne maximale Tk . Nous appellerons Tk enveloppe de Kaiser de Ti en hommage à [Kaiser 1969].

Lemme 8 (Amalgamation asymétrique). *Si g est une immersion de A dans B et h un homomorphisme de A dans C , on peut trouver une structure D avec un homomorphisme g' de B dans D et une immersion h' de C dans D tels que g'o g = h' o h .*

Démonstration. Donnons des noms aux éléments de A , B et C , de sorte que le nom d'un élément de A serve aussi à nommer ses images par f et par g . Ce que nous voulons revient à montrer la consistance de la théorie h-inductive formée du diagramme de B , du diagramme de C , et des énoncés h-universels, à paramètres dans C , qui sont satisfait dans C . Elle suit du fait que chaque fragment fini $f(\underline{a},\underline{b})$ du diagramme de B s'interprète par un $\underline{b}'$ dans A . **Fin**

Remarque. Si g et h sont tous deux des immersions, on ne peut garantir qu'à la fois g' et h' le soient.

THEOREME 9 (AMALGAMATION). *On peut amalgamer les homomorphismes entre modèles existentiellement clos d'une théorie h-inductive.*

Démonstration. Ces homomorphismes sont des immersions : il suffit de continuer le D du Lemme 8 en un existentiellement clos. **Fin**

LEMME 10. *Si* M *est un modèle existentiellement clos de la théorie h-inductive* Ti *, il en est de même de toute* L*-structure immergée dans* M .

Démonstration. Soit A une structure immergée dans M , et soit B une continuation de A qui soit modèle de Ti . D'après le lemme 8, B et M se continuent tous deux en un modèle D de Ti ; comme M est immergé dans D , A est immergé dans B ; en effet si la formule libre positive $f(\underline{a},\underline{y})$ est satisfaisable dans B , elle l'est dans D , puis dans M , puis dans A . **Fin**

Ce Lemme 10, combiné avec le suivant, permet de contrôler les cardinalités des modèles existentiellement clos.

LEMME 11. *Si* M *est une* L*-structure et* A *une partie de* M *, on peut trouver une sous-structure* N *de* M *, qui est immergée dans* M *, qui contient* A *, et dont le cardinal est inférieur à* Max(card(A),card(L)) .

Démonstration. Pour chaque formule libre positive $f(\underline{a},\underline{y})$, à paramètres $\underline{a}$ dans $A = A_0$, qui est satisfaisable dans M , on ajoute à A un $\underline{y}$ qui la satisfait ; on obtient, ainsi un ensemble A_1 ; on répète l'opération en remplaçant A par A_1 pour obtenir A_2 , et ainsi de suite ; N est la réunion (ou plutôt la limite inductive) des A_n . On aurait pu prendre pour N une restriction élémentaire de M , si nous avions déjà lu [Tarski & Vaught 1957]. **Fin**

LEMME 12. *La classe des modèles existentiellement clos d'une théorie h-inductive est inductive.*

Démonstration. Soit M la limite inductive des M_i , tous modèles existentiellement clos de la théorie h-inductive Ti ; si la formule libre positive, à paramètres dans M , $f(\underline{a},\underline{y})$ est satisfaisable dans une continuation de M qui soit modèles de Ti , elle l'est aussi dans M_i dès que ce dernier contient (des représentants de) chaque élément de $\underline{a}$; elle est donc satisfaisable dans M . **Fin**

Espaces de types

Lemme 13 (Maximalite des types positifs). *Soient* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *deux* n*-uples extraits de modèles* M *et* N *existentiellement clos d'une théorie h-inductive* Ti *; si toute formule (existentielle) positive satisfaite par* $\underline{a}$ *dans* M *l'est aussi par* $\underline{b}$ *dans* N *,* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *satisfont les mêmes formules positives.*

Démonstration. Pour tout fragment fini $f(\underline{a},\underline{a}')$ du diagramme positif de M , $(\exists\ \underline{y})\ f(\underline{x},\underline{y})$ est satisfaite par $\underline{a}$, et donc aussi par $\underline{b}$; par compacité, on peut trouver un homomorphisme h , tel que $h(\underline{a}) = \underline{b}$, de M dans une continuation N' de N qui soit modèle de Ti ; comme N et $h(M)$ sont existentiellement clos, ils sont immergés dans N' , et $\underline{b}$ satisfait les mêmes formules positives dans N , dans N' et dans $h(M)$, soit encore les mêmes formules positives que $\underline{a}$ dans M . **Fin**

Etant donnée une théorie h-inductive consistante Ti , on appellera type en n variables $\underline{x}$ pour la théorie Ti un ensemble de formules positives $f_i(\underline{x})$ qui soit maximal parmi ceux qui sont consistants avec Ti ; comme ils sont réalisés dans des modèles existentiellement clos de Ti , ce sont les mêmes que ceux associés à Tk , ou à Tu , ou à n'importe quelle compagne de Ti . D'après le Lemme 13, chaque n-uple extrait d'un modèle existentiellement clos de Ti y réalise un certain type.

Lemme 14. *Dans les modèles existentiellement clos de* Ti *, si un uple* $\underline{a}$ *ne satisfait pas une formule positive* $f(\underline{x})$ *, c'est qu'il satisfait une formule positive* $g(\underline{x})$ *incompatible avec* $f(\underline{x})$ *: la théorie* Tu *implique* $\neg\ (\exists\ \underline{x})\ f(\underline{x}) \wedge g(\underline{x})$.

Démonstration. Comme les types sont des ensembles de formules positives maximaux consistants avec Tu , si $\underline{a}$ ne satisfait pas $f(\underline{x})$, c'est que la théorie formée de Tu , de $f(\underline{x})$ et du type de $\underline{a}$ est contradictoire ; par compacité, un fragment fini $g(\underline{x})$ de ce dernier suffit a cette inconsistance, si bien que Tu est contradictoire avec $f(\underline{x}) \wedge g(\underline{x})$, et contient l'axiome h-universel $\neg\ (\exists\ \underline{x})\ f(\underline{x}) \wedge g(\underline{x})$. **Fin**

On dit qu'une théorie h-inductive Ti est modèle-complète si tout homomorphisme entre modèles de Ti est une immersion, soit encore, d'après le Lemme 10, si tous les modèles de Ti sont positivement existentiellement clos.

Lemme 15. *Une théorie h-inductive* Ti *est modèle-complète ssi chaque* L-*formule positive* $f(\underline{x})$ *y a un complément* $f'(\underline{x})$ *de même nature, tel que* Ti *implique* $\neg (\exists\, \underline{x})\, [f(\underline{x}) \wedge f'(\underline{x})]$ *et* $(\forall\, \underline{x})\, [f(\underline{x}) \vee f'(\underline{x})]$.

Démonstration. Il est clair que si Ti est complémentée, elle est modèle-complète. Réciproquement, considérons l'ensemble des formules positives $g(\underline{x})$ telles que Ti implique que $f(\underline{x})$ et $g(\underline{x})$ soient disjointes ; si Ti n'est pas complémentée, elle n'implique jamais que f définisse le complément de la disjonction d'un nombre fini d'entre elles si bien que, par compacité, on peut trouver un modèle M de Ti avec un $\underline{a}$ ne satisfaisant ni f ni aucun des g (il s'agit d'une famille d'énoncés inductifs dans le langage $L(\underline{a})$) ; d'après le Lemme 14, M n'est pas existentiellement clos. **Fin**

Pour que Ti soit modèle-complète, il ne suffit pas que dans chacun de ses modèles le complément d'une formule positive $f(\underline{x})$ soit défini par une formule positive ; il est nécessaire qu'il le soit toujours par la même formule positive. Un exemple très simple est donné par la théorie Ti d'axiome $(\forall\, x, y)\ x = y$, dans le langage comprenant l'égalité et un prédicat $A(x)$; elle a deux modèles, le premier composé d'un point ne satisfaisant pas A , et le deuxième d'un point satisfaisant A ; seul le second est existentiellement clos.

Lemme 16. *Soient* M *un modèle de* Tu *et* $\underline{a}$ *un uple d'éléments de* M . *Si l'ensemble* π *des formules existentielles positives satisfaites par* $\underline{a}$ *dans* M *est contenu dans le type* p *, il existe une continuation existentiellement close de* M *où l'image de* $\underline{a}$ *est de type* p .

Démonstration. Soit $\underline{a}$’ un élément de type p , dans un modèle existentiellement clos M’ de Tu ; si $f(\underline{a},\underline{b})$ est un fragment fini du diagramme positif de M , $(\exists\, \underline{y})\, f(\underline{x},\underline{y})$ fait partie de π , et est donc satisfaite par $\underline{a}$’ dans M’ ; par compacité, on peut trouver un homomorphisme de M dans un modèle M’’ de Tu continuant M’ , qui envoie $\underline{a}$ sur $\underline{a}$’ ; comme p est maximal, $\underline{a}$’ est de ce type dans M’’ . **Fin**

On topologise l'ensemble $S_n(Ti) = S_n(Tu) = S_n(Tk)$ de ces types en décrétant qu'une formule (existentielle) positive définit un fermé ; les fermés sont donc associés aux conjonctions finies ou infinies de formules positives ; tous les ensembles finis sont fermés. D'après le Théorème de compacité, cet ensemble est compact au sens anglais, mais seulement quasi-compact au sens français ; en effet, il ne satisfait pas nécessairement l'axiome de séparation de Hausdorff.

En supprimant la dernière variable, on obtient une projection surjective de S_{n+1} sur S_n , qui est continue ; en effet, l'image réciproque d'une partie de S_n définie par une formule positive est la partie de S_{n+1} définie par cette même formule. Cette projection a une section continue, qui au type de $(x_1, \dots x_n)$ associe celui de $(x_1, \dots x_n, x_n)$.

Lemme 17. *La projection d'un fermé de* $S_{n+1}(Ti)$ *dans* $S_n(Ti)$ *est un fermé.*

Démonstration. Attention à l'erreur de Lebesgue ! Un fermé de $S_{n+1}(Ti)$ est défini comme étant l'intersection d'ensembles définis par des formules positives $f_i(\underline{x},y)$, qu'on peut supposer clos par intersections finies ; sa projection est définie par la conjonction des $(\exists\, y)\, f_i(\underline{x},y)$. **Fin**

La famille des espaces de types réalisés dans les modèles existentiellement clos d'une théorie h-inductive Ti , c'est ce que [Ben-Yaacov 2003] a appelé un chat ; le chat est donc aussi bien déterminé par Tu que par Tk , ou que par n'importe laquelle de leurs compagnes. Mais le chat transcende les barrières linguistiques, puisque des théories h-inductives de langages différents dont les espaces de types sont homéomorphes définissent le même chat.

La notion de chat est trop générale pour qu'on puisse conduire dans les structures existentiellement closes correspondantes les arguments usuels de Théorie des modèles ; il est nécessaire pour cela de pouvoir exprimer positivement un minimum de choses négatives. C'est ainsi que [Ben-Yaacov 2003ter] a reproduit toute la théorie de la simplicité, et de la stabilité, dans les chats gras (thick cats), chez qui la notion de suite indiscernable est définie par des fermés dans les espaces de types.

Une classe plus restreinte est formée par les chats de Hausdorff, ou chats séparés, pour lesquels les espaces de types sont des vrais compacts au sens français : ils satisfont la condition de séparation de Hausdorff. Il existe des chats gras non séparés, mais ce sont des curiosités ; les chats non séparés sont exotiques pour plusieurs raisons : l'une d'entre elles est qu'on peut avoir des chats différents avec les mêmes ensembles de types, la topologie du premier étant plus fine que celle du second ; cela est impossible pour des chats de Hausdorff, puisqu'une bijection continue entre deux (vrais) compacts est bicontinue.

Les chats continus sont les chats séparés dans lesquels la projection sur S_n d'un ouvert de S_{n+1} est toujours ouverte, et où l'égalité est définie par une intersection dénombrable d'ouverts. D'après [Ben-Yaacov & Usvyatsov 20??], ces chats sont adaptés à la théorie des modèles de la Logique continue.

Dernière race de chats, les chats classiques, ou discrets, sont les chats continus dont les espaces de types ont une topologie totalement discontinue (engendrée par une base d'ouverts-fermés), et où l'égalité est ouverte-fermée.

Les espaces de types d'une théorie h-inductive modèle-complète forment un chat classique ; réciproquement, la morlèisation nous permettra de définir ces chats classiques par des théories h-inductive modèle-complètes dans un langage ad hoc (celui des ouverts-fermés des espaces de types), ainsi que de remplacer toute théorie de la Logique du premier ordre avec négation par une théorie h-inductive modèle-complète dans un langage étendu.

Domaines universels

Pour avoir des domaines universels réalisant simultanément tous les types, il faut une hypothèse de complétude. On dit qu'une théorie h-universelle est complète (parmi les théories h-universelles) si c'est la théorie h-universelle d'une certaine structure ; on ne confondra pas théorie h-universelle complète et théorie h-universelle maximale.

Les complétées h-universelles minimales d'une théorie h-universelle T_u sont les théories h-universelles de ses modèles existentiellement clos ; elles ne sont pas toujours deux-à-deux contradictoires : les contradictions apparaissent dans les enveloppes de Kaiser, et sont de nature existentielle puisque ces enveloppes correspondent aux 0-types. Considérons par exemple, dans le langage de deux prédicats A et B , la théorie Tu définie par l'axiome $\neg (\exists x) A(x) \vee \neg (\exists x) B(x)$; ses deux complétées h-universelles minimales sont axiomatisées respectivement par $\neg (\exists x) A(x)$ et par $\neg (\exists x) B(x)$; leurs enveloppes de Kaiser le sont respectivement par $(\forall x) B(x)$ et par $(\forall x) A(x)$; elles se contredisent par les axiomes existentiels positifs $(\exists x) B(x)$ et $(\exists x) A(x)$.

On dit qu'une théorie h-inductive a la jocpe (ou propriété de la continuation commune) si deux quelconques de ses modèles ont une commune continuation. Pour les existentiellement clos, la jocpe coïncide avec la jeppe, qui est la propriété de l'extension commune.

Lemme 18. *Une théorie h-universelle consistante est complète si et seulement si elle a la jocpe ; si une théorie h-inductive a la jocpe, il en est de même de toutes ses compagnes.*

Démonstration. Si Tu a la jocpe, deux modèles A et B existentiellement clos de Tu se continuent en un même troisième C ; comme A et B sont immergés dans C , ils ont tous deux même théorie h-universelle ; d'après le Lemme 6, Tu est la théorie h-universelle d'un quelconque de ses modèles existentiellement clos.

Réciproquement, supposons Tu complète : elle est la théorie h-universelle d'un de ses modèles M ; considérons deux autres de ses modèles A et B : chacun d'entre eux satisfait plus d'axiomes h-universels que M , si bien que son diagramme positif est finiment interprétable dans M ; par compacité (en fait, d'après le Lemme 2), la théorie formée du diagramme positif de A , du diagramme positif de B et de Tu est consistante.

Pour montrer la deuxième proposition, on remarque qu'une théorie h-inductive a la jocpe si et seulement si la classe de ses modèles existentiellement clos a la jeppe. **Fin**

D'après les Lemmes 9, 11, 12 et 18, la classe des modèles existentiellement clos d'une théorie h-universelle complète Tu , qui - insistons bien sur ce point - est aussi la classe des modèles existentiellement clos d'une quelconque théorie h-inductive Ti comprise entre Tu et son enveloppe de Kaiser Tk , satisfait les conditions dégagées par Bjarni Jonsson ([Jonsson 1956, 1960]), en s'appuyant sur les travaux de Roland Fraïssé ([Fraïssé 1953]), impliquant l'existence de domaines universels.

Si Γ est la classe des modèles existentiellement clos d'une théorie h-inductive avec jocpe, et κ un cardinal strictement supérieur à celui du langage L, on peut donc montrer l'existence d'éléments D de Γ qui sont à la fois κ-universels (tout élément de Γ de cardinal strictement inférieur à κ se plonge dans D) et κ-homogènes (tout isomorphisme entre deux restrictions de D qui sont dans Γ, et qui ont strictement moins de κ éléments, se prolonge en un automorphisme de D). Notons bien que nous sommes dans un contexte où tous les homomorphismes, étant des immersions, sont des plongements, et les homomorphismes surjectifs des isomorphismes.

Lemme 19. *Si* Ti *a la jocpe, deux uples* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *de même type, extrait d'un domaine* M *pour* Ti *(homogène-universel en un cardinal supérieur à celui du langage), se correspondent par automorphisme de* M *.*

Démonstration. Considérons des restrictions existentiellement closes A et B de M, de petite cardinalité, et contenant respectivement $\underline{a}$ et $\underline{b}$. Par compacité, on peut immerger B dans un modèle existentiellement clos C de Ti, qui soit de petite cardinalité, et dans lequel on peut immerger A par un homomorphisme envoyant $\underline{a}$ sur $\underline{b}$; par universalité de M, on peut y immerger C en C' ; comme B et B' sont isomorphes, par homogénéité de M on peut déplacer C' par un automorphisme de M de manière à avoir $B = B'$; on obtient alors un isomorphisme entre A et A' envoyant $\underline{a}$ sur $\underline{b}$, qui se prolonge en un automorphisme de M. **Fin**

Ce lemme explique pourquoi nous sommes contraints, en Logique positive, de ne considérer essentiellement que des structures qui sont modèles existentiellement clos de leur propre théorie h-universelle : dans les autres structures, les formules positives ne suffisent pas à déterminer la place de leurs éléments. Remarquons en passant que toute structure M est modèle existentiellement clos de sa propre théorie h-universelle, et de sa propre théorie h-inductive, dans le langage $L(M)$: en effet, si $\underline{a}$ ne satisfait pas la formule positive $f(\underline{x},\underline{b})$, c'est que la formule positive $\underline{x} = \underline{a}$ est incompatible avec elle ; c'est ce qui à permis à [Poizat 20??] de définir l'extension élémentaire en Logique positive.

Un argument classique montre qu'on obtient des modèles κ^+-homogènes-universels de cardinal inférieur à 2^κ. Si on se permet de faire une hypothèse d'inaccessibilité sur le cardinal κ, on peut construire un domaine κ-homogène-universel de cardinal inférieur ou égal à κ, qui est unique à isomorphie près. Il n'est pas certain qu'il soit de cardinal κ, car il peut y avoir une borne au cardinal des modèles existentiellement clos de T_u ; un mauvais réflexe de théoricien des modèles négationniste serait de croire que, si cette borne existe, elle est finie ; elle peut être infinie, ce qui ne contredit pas le Théorème de compacité, puisque l'inégalité $x \neq y$ n'est pas toujours exprimable positivement. Ce dernier domaine est le "modèle monstre" dans lequel vivent volontiers les théoriciens des modèles contemporains.

Si on répugne à l'hypothèse d'existence de cardinaux inaccessibles, et désire cependant travailler dans un domaine universel uniquement déterminé, on peut s'orienter vers les modèles spéciaux de [Chang & Keisler 1973], une construction ingénieuse qui n'a pas eu les faveurs de la profession.

Cela vient de ce qu'au fond l'unicité du domaine universel n'est pas indispensable : on peut parfaitement travailler au sein de la famille des modèles κ-homogènes-universels, qui sont tous équivalents dans le langage $L_{\infty\omega}$, puisqu'on peut établir un va-et-vient infini entre deux quelconques d'entre eux (on peut même n'exiger d'eux qu'une propriété plus faible d'homogénéité, associée aux va-et-vient). En effet, si on manque de place dans un domaine κ-homogène-universel, on pourra toujours l'étendre en un domaine κ'-homogène-universel pour un cardinal κ' supérieur à κ.

Tous ces domaines sont bien sûr élémentairement équivalents (au sens de la Logique du premier ordre avec négation), mais ni leur théorie élémentaire, ni les modèles saturés d'icelle, ne sont l'objet de notre étude.

Théories de Jonsson et séparation

Tölendi Mustafin (voir [Mustafin & Nurkhaidarov 1995], qui n'est sans doute pas la plus ancienne référence) a appelé « Théorie de Jonsson » une théorie dont les modèles satisfont aux conditions de Jonsson. Dans notre contexte positif, il s'agit donc d'une théorie h-inductive dont les modèles ont jocpe et propriété d’amalgamation (nous omettons la condition d'existence de modèles infinis). Si Ti est de Jonsson, n’importe quelle théorie h-inductive comprise entre Ti et Tk est de Jonsson. Il peut arriver que Tu , et en conséquence toutes ses compagnes, soient de Jonsson, mais en général, Ti n'a pas de compagne de Jonsson minimale (voir [Mustafin 2002]).

Que gagne-t’on à savoir qu’on peut amalgamer tous les modèles de Tk , et pas seulement ceux qui sont existentiellement clos ? Vous donnez votre langue au chat ?

Theoreme 20. *Les espaces de types d’une théorie h-inductive* Ti *sont compacts, c’est-à-dire séparés, si et seulement si on peut amalgamer les homomorphismes entre les modèles de son enveloppe de Kaiser* Tk .

Démonstration. Supposons qu’une de ces topologies ne soit pas séparée, et montrons que les modèles de Tk ne sont pas amalgamables. Soient alors p et q deux n-types non séparés : si $p \in O_1$ et $q \in O_2$, où O_1 et O_2 sont deux ouverts, alors $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$; comme les ouverts de base sont définis par des formules universelles, cela signifie que, chaque fois que p satisfait $(\forall \underline{y}) \neg f(\underline{x},\underline{y})$ et q satisfait $(\forall \underline{z}) \neg g(\underline{x},\underline{z})$, alors il existe un type r satisfaisant $(\forall \underline{y}) \neg f(\underline{x},\underline{y}) \wedge (\forall \underline{z}) \neg g(\underline{x},\underline{z})$. Par compacité (pour les énoncés h-inductifs), on peut trouver un modèle M de Tk (pas un modèle existentiellement clos) avec un uple $\underline{a}$ ne satisfaisant dans M que des formules existentielles satisfaites à la fois par p et par q . D’après le Lemme 16, on peut trouver une extension existentiellement close M_1 de M où $\underline{a}$ est de type p , et une autre, M_2 , où il est de type q ; comme p et q sont contradictoires, on ne peut pas amalgamer.

Montrons réciproquement que, si toutes ces topologies sont séparées, on peut amalgamer les modèles de Tk . Par compacité, cela revient à voir que si M est un modèle de Tk , $\underline{a}$ un uple d’éléments de M , et M_1 , M_2 deux modèles de Tk continuant M , alors les types existentiel de $\underline{a}$ dans M_1 et de $\underline{a}$ dans M_2 sont compatibles. Supposons le contraire : comme on peut prendre ces deux derniers modèles existentiellement clos, cela revient à dire que le type existentiel π de $\underline{a}$ dans M se prolonge en deux types distincts p et q . Vu la séparation, p satisfait $(\forall \underline{y}) \neg f(\underline{x},\underline{y})$, et q satisfait $(\forall \underline{z}) \neg g(\underline{x},\underline{z})$, ces deux formules étant incompatibles : tout modèle existentiellement clos satisfait $(\forall \underline{x}) [(\exists \underline{y}) f(\underline{x},\underline{y}) \vee (\exists \underline{z}) g(\underline{x},\underline{z})]$; comme cet énoncé est h-inductif, il fait partie de Tk , et est aussi vrai dans M , si bien que π contient l'une des deux formules $(\exists \underline{y})\ f(\underline{x},\underline{y})$ ou $(\exists \underline{z})\ g(\underline{x},\underline{z})$, d'où contradiction. **Fin**

La morale, c'est que plus large est la classe des modèles de Tu qu'on peut amalgamer, meilleures sont les propriétés d'homogénéité des domaines universels. Si Ti est une théorie de Jonsson, $Tu \subseteq Ti \subseteq Tk$, tout isomorphisme entre petits modèles de Ti s'étend en un automorphisme des domaines universels. Autrement dit, les types existentiels au sens des modèles de Ti ne s'étendent que d'une seule manière en des types existentiels complets. Par exemple, si tous les modèles de Tu sont amalgamables, les types sont déterminés par les formules positives libres qu'ils satisfont, et ces formules engendrent leur topologie ; le chat est séparé, mais pas nécessairement totalement discontinu puisque les formules libres ne sont pas closes par négation.

Morlèisation positive

a. Fonctions

Nous aurions pu autoriser des fonctions dans le langage et reproduire verbatim toutes les sections précédentes. Le seul point qu'il aurait fallu modifier c'est la démonstration du Lemme 2 qui prépare le Théorème de compacité : il aurait fallu introduire des algèbres de termes.

Nous avons préféré montrer le Théorème de compacité pour les énoncés h-inductifs d'un langage L avec fonctions en nous ramenant à celui d'un langage L^G purement relationnel, dans lequel une fonction n-aire de L est remplacée par son graphe, qui est une relation (n+1)-aire. On observe que le fait qu'une relation (n+1)-aire soit le graphe d'une fonction s'exprime par des énoncés h-inductifs, et que les graphes des termes de L , ainsi que les formules atomiques de L , se traduisent positivement dans L^G . A toute théorie h-inductive Ti formulée dans le langage L , on peut donc associer une théorie équiconsistante h-inductive Ti^G dans le langage L^G , dont tout fragment fini est contenu dans un T'^G , où T' est un fragment fini de Ti ; si donc Ti est localement consistante, Ti^G aussi ; elle est donc consistante d'après le Théorème 4, ainsi que Ti .

La conclusion, c'est qu'à partir de maintenant nous tolérons la présence de fonctions dans le langage L .

b. Compacité

Nous avons annoncé que le Théorème de compacité de la Logique du premier ordre était une conséquence directe du Théorème 4. Il nous faut maintenant dire pourquoi : pour cela, nous morlèisons les théories, en étendant le langage L en un langage L^M qui contient un nouveau symbole de relation $\varphi(\underline{x})$ pour chaque L-formule $f(\underline{x})$ du langage du premier ordre (avec négation) ; en particulier, aux énoncés de L sont associées des variables propositionnelles dans L^M . Nous attirons l'attention de nos lecteurs sur le fait que nous n'utilisons que les symboles $\exists$, $\vee$, $\wedge$ et $\neg$ dans l'écriture des formules du premier ordre ; les autres symboles doivent être considérés comme des abréviations, et en particulier $\forall$ est mis pour $\neg\exists\neg$; il est impératif qu'une formule en $\forall$ soit morlèisée en trois étapes, car une morlèisation directe introduirait un énoncé structurel non h-inductif.

Nous appelons énoncés structurels de la morlèisation les énoncés suivants, qui sont tous des énoncés h-inductifs du langage L^M :

- si $\varphi(\underline{x})$ est associée à la formule atomique $f(\underline{x})$, l'énoncé qui déclare que $\varphi(\underline{x})$ et $f(\underline{x})$ sont équivalents
- si $\varphi(\underline{x})$, $\psi(\underline{x})$ et $\chi(\underline{x})$ sont associées respectivement à $f(\underline{x})$, $g(\underline{x})$ et $f(\underline{x})\wedge g(\underline{x})$, l'énoncé qui déclare que $\varphi(\underline{x})\wedge\psi(\underline{x})$ et $\chi(\underline{x})$ sont équivalents
- si $\varphi(\underline{x})$, $\psi(\underline{x})$ et $\chi(\underline{x})$ sont associées respectivement à $f(\underline{x})$, $g(\underline{x})$ et $f(\underline{x})\vee g(\underline{x})$, l'énoncé qui déclare que $\varphi(\underline{x})\vee\psi(\underline{x})$ et $\chi(\underline{x})$ sont équivalents
- si $\varphi(\underline{x})$ et $\psi(\underline{x})$ sont associées respectivement à $f(\underline{x})$ et $\neg f(\underline{x})$, les énoncés $\neg (\exists\ \underline{x})\ \varphi(\underline{x})\wedge\psi(\underline{x})$ et $(\forall\ \underline{x})\ \varphi(\underline{x})\vee\psi(\underline{x})$ qui déclarent que $\varphi(\underline{x})$ et $\psi(\underline{x})$ sont complémentaires l'un de l'autre
- si $\varphi(\underline{x},y)$ et $\psi(\underline{x})$ sont associées respectivement a $f(\underline{x},y)$ et $(\exists y)\ f(\underline{x},y)$, l'énoncé qui déclare que $(\exists\ y)\ \varphi(\underline{x},y)$ et $\psi(\underline{x})$ sont équivalents.

La morlèisée d'une théorie du premier ordre T du langage L est la théorie h-inductive T^M, formalisée dans le langage L^M, qui comprend les énoncés structurels de la morlèisation, et les constantes propositionnelles associées aux énoncés de T ; elle est équiconsistante, et équi-localement-consistante, avec cette dernière, si bien qu'on obtient le théorème de compacité général à partir du Théorème 4.

Maintenant que nous connaissons le Théorème de compacité dans toute sa force, nous pouvons caractériser les énoncés h-universels et h-inductifs parmi les énoncés du premier ordre, et déterminer à quelle condition les modèles existentiellement clos d'une théorie h-inductive forment une classe élémentaire. Nous le faisons par concession aux habitudes des théoriciens des modèles de la vieille garde, car pour un positiviste fanatique la négation n'existe pas, et il n'y pas d'énoncés autres que h-inductifs.

Lemme 21. *Une théorie* T *est axiomatisée par des énoncés h-universels si et seulement si toute structure qui se continue en un modèle de* T *est aussi modèle de* T.

Démonstration. Par définition de la notion d'homomorphisme, un énoncé h-universel qui est vrai dans une continuation de M l'est aussi dans M. Réciproquement, considérons une théorie T dont les modèles ont cette propriété, et notons Tu l'ensemble de ses conséquences h-universelles. Soient M un modèle de Tu, et $f(\underline{a})$ une formule du diagramme positif de M ; l'énoncé $\neg (\exists \underline{x})\, f(\underline{x})$ n'est pas conséquence de Tu, ni non plus de T ; par compacité, le diagramme libre positif de M est consistant avec T, ce qui signifie que M se continue en un modèle de T ; par hypothèse, M est aussi modèle de T, si bien que T et Tu ont les mêmes modèles. **Fin**

Lemme 22. *Un homomorphisme* f *de* M *dans* N *est une immersion si et seulement si on peut trouver un homomorphisme* g *de* N *dans une troisième structure* M' *tel que* $g \circ f$ *soit un plongement élémentaire de* M *dans* M'.

Démonstration. Si $g \circ f$ est élémentaire, un $\underline{a}$ de M ne peut pas satisfaire moins de formules existentielles positives dans M que dans M', ni que dans N ; par conséquent f est une immersion.

Réciproquement, si f est une immersion, chaque fragment fini du diagramme positif de N s'interprète finiment dans M, sans déplacer les éléments de M ; par compacité, on obtient un homomorphisme g, valant l'identité sur M, de N dans une extension élémentaire M' de M. **Fin**

La démonstration du lemme suivant reproduit un argument classique dont, d'après [Hodges 1993], la plus ancienne référence est [Los & Suszko 1957].

THEOREME 23. *Les modèles de la théorie* T *forment une classe inductive (pour les homomorphismes) si et seulement si elle est axiomatisée par des énoncés h-inductifs.*

Démonstration. Nous avons remarqué depuis longtemps que la classe des modèles d'une théorie h-inductive est inductive. Supposons réciproquement que la classe des modèles de T soit inductive, et notons Ti l'ensemble de ses conséquences h-inductives.

Considérons un modèle M_0 de Ti, et montrons qu'il existe une immersion de M_0 dans un modèle N_0 de T ; en effet, cela revient à voir la consistance de la théorie formée de T et des énoncés $f(\underline{a})$, $(\forall \underline{y}) \neg g(\underline{a},\underline{y})$, $\underline{a} \in M_0$, f, g étant positives libres, qui sont vrais dans M_0. Par compacité, il suffit de considérer la conjonction d'un nombre fini de ces énoncés, de la forme $(\forall \underline{y})$ $f(\underline{a}) \wedge \neg g_1(\underline{a},\underline{y}) \wedge \ldots \wedge \neg g_n(\underline{a},\underline{y})$; $(\exists \underline{x}) (\forall \underline{y})$ $f(\underline{x}) \wedge \neg g_1(\underline{x},\underline{y}) \wedge \ldots \wedge \neg g_n(\underline{x},\underline{y})$ est compatible avec T, si bien que sa négation $(\forall \underline{x})(\exists \underline{y})$ $f(\underline{x}) \rightarrow (g_1(\underline{x},\underline{y}) \vee \ldots \vee g_n(\underline{x},\underline{y}))$ n'est pas conséquence de T ; comme cette négation est h-inductive, elle n'est pas non plus conséquence de Ti ; donc $(\exists \underline{x}) (\forall \underline{y})$ $f(\underline{x}) \wedge \neg g_1(\underline{x},\underline{y}) \wedge \ldots \wedge \neg g_n(\underline{x},\underline{y})$, ainsi que $(\forall \underline{y})$ $f(\underline{a}) \wedge \neg g_1(\underline{a},\underline{y}) \wedge \ldots \wedge \neg g_n(\underline{a},\underline{y})$, sont consistants avec T.

Ensuite, d'après le Lemme 20, on obtient un homomorphisme de N_0, valant l'identité sur M_0, dans une extension élémentaire M_1 de M_0.

Nous répétons alors la construction, pour obtenir une suite d'homomorphismes $M_0 \rightarrow N_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \ldots \rightarrow M_i \rightarrow N_i \rightarrow M_{i+1} \rightarrow \ldots$ telle que les N_i soient modèles de T, et les extensions de M_i soient élémentaires. La limite inductive commune à ces deux suites est un modèle de T extension élémentaire de M_0 ; ce dernier, ainsi que tout modèle de Ti, est modèle de T, si bien que ces deux théories sont équivalentes. **Fin**

Remarque. En appliquant le théorème de compacité encore une fois, on conclut qu'un énoncé du premier ordre axiomatise une classe inductive si et seulement s'il est équivalent à un énoncé h-inductif.

Corollaire 24. *Les modèles existentiellement clos d'une théorie h-inductive* Ti *forment une classe élémentaire si et seulement son enveloppe de Kaiser* Tk *est modèle-complète. Dans le cas contraire, et si* Ti *a la jocpe, aucun de ses modèles existentiellement clos n'est* $\text{card}(L)^+$*-saturé.*

Démonstration. D'après le Théorème 23, comme les modèles existentiellement clos de Ti forment une classe inductive, leur théorie est Tk, si bien que l'hypothèse signifie que tout modèle de Tk est existentiellement clos, ce qui est précisément la définition de sa modèle-complétude.

Si Tk a la jocpe, elle est la théorie inductive de chacun de ses modèles existentiellement clos ; si elle n'est pas modèle-complète, on peut trouver f dont la négation n'est définie par une formule positive dans aucun de ses modèles M existentiellement clos. D'après le Lemme 14, dans M cette négation s'exprime comme une disjonction de formules positives ; comme cette disjonction est irrémédiablement infinie, M ne peut être saturé. **Fin**

c. Miaou

La morlèisation ne préserve pas seulement la consistance ; elle préserve en fait toute la théorie des modèles. Par exemple, elle permet de ramener à la Logique positive ce qu'on pourrait appeler la "Logique de Robinson", où la négation n'est utilisée que dans les formules libres, en introduisant des symboles interprétant les négations de relations atomiques. C'est ainsi que les travaux de [Hrushovski 1997] à propos des modèles existentiellement clos des théories universelles avec amalgamation, ou de [Pillay 2000] qui ne suppose plus aucune propriété d'amalgamation, s'interprètent en Logique positive.

Plus généralement, la morlèisation fait entrer, par un simple gonflement du langage, la présentation des chats par les "fragments positifs" de [Ben-Yaacov 2003] dans le cadre positif strict que nous avons adopté ici. Ces fragments positifs n'ont donc qu'une fonction décorative, permettant une application plus directe de la notion de chat à des contextes algébriques où les homomorphismes ont des propriétés particulières.

Un fragment positif de la Logique du premier ordre est un ensemble Δ de formules, contenant les formules atomiques d'un certain langage L, clos par changement de variables, par sous-formules (attention : les seuls symboles permis sont $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\exists$) et par les connecteurs $\vee$ et $\wedge$; on note Σ l'ensemble des formules de la forme $(\exists\ \underline{y})\ f(\underline{x},\underline{y})$, où f est dans Δ . Un énoncé Δ-universel, ou Σ-universel, est la négation d'un énoncé de Σ ; un énoncé Δ-inductif, ou Σ-inductif, exprime l'inclusion d'un ensemble Σ-définissable dans un autre.

Un Δ-homomorphisme h de M vers N a la propriété que toute formule $f(x)$ de Δ qui est satisfaite par $\underline{a}$ dans M l'est aussi par $h(\underline{a})$ dans N ; c'est exactement la même chose qu'un Σ-homomorphisme. C'est une Δ-immersion, ou une Σ-immersion si $\underline{a}$ dans M et $h(\underline{a})$ dans N satisfont les mêmes formules de Σ (pas de Δ !). Il convient alors de reprendre pour les Δ-homomorphismes tous les résultats faciles de la première section concernant les homomorphismes, et en particulier se convaincre qu'il ont des limites inductives, et que les classes Δ-inductives ont des Σ-clos. On définit ensuite les domaines Δ-universels et les espaces de types, qu'on topologise de manière quasi-compacte en décrétant que les formules de Σ définissent des fermés. Nous laissons tout cela à nos lecteurs disciples de Saint Didymes (dans un exposé de mathématique, on préfère en général le grec à l'araméen).

On remarquera que, pour ce qui est des définitions, on pourrait tout aussi bien prendre $\Delta = \Sigma$; cette distinction entre Δ et Σ a été introduite pour pouvoir rendre compte de situations naturelles où les formules de Δ suffisent à déterminer les types, et à définir leurs topologies.

Il est immédiat de faire entrer tout cela dans le cadre de la Logique positive stricte, en morlèisant toutes les formules de Δ : les théories Σ-inductives ont des morlèisées h-inductives, les Σ-homomorphismes entre leurs modèles correspondent exactement aux homomorphismes entre modèles des morlèisées, les Σ-immersions correspondent aux immersions, et les modèles Σ-clos aux modèles existentiellement clos. En bref, pour toutes les considérations théoriques sur les chats, on peut supposer que Σ est l'ensemble des formules positives, et Δ l'ensemble des formules positives libres.

Quand on prend pour Δ l'ensemble de toutes les formules du premier ordre, la morlèisation positive totale transforme les théories en théories h-inductive modèles-complètes, et les plongements élémentaires en homomorphismes, qui sont nécessairement des immersions. C'est ainsi que le domaine universel dans lequel nous avons pris l'habitude de travailler, le modèle-monstre d'une théorie complète, devient un chat particulier, qui a été introduit d'une manière remarquablement féline par [Morley & Vaught1962].

Peut-être que la façon la plus convaincante de faire apparaître la Théorie des modèles de la Logique du premier ordre comme un cas particulier de celle de la Logique positive, c'est d'adopter le point-de-vue des univers, où l'on étudie la famille des ensembles définissables dans une structure donnée en oubliant cette structure elle-même, comme il est fait dans [Poizat 20 ??].

Quant à la morlèisation partielle, on peut lui trouver de nombreux précédents, comme entres autres [Pouzet 1961], [Mustafin 1998], ou les premiers travaux de Robinson lui-même.

d. Morlèisation topologique

Cette section finale illustre la liberté que donne la Logique positive : on y morlèise (c'est-à-dire on transforme en formule atomique) tous les fermés des espaces de types mais, bien sûr, pas leurs compléments. Cela signifie que la Logique positive ne distingue pas vraiment les ensembles définissables des ensembles infiniment définissables : ce n'est qu'une question de langage. Même dans une logique à la Robinson, où l'emploi de la négation est limité, on ne peut morlèiser sans catastrophe que des ouverts-fermés.

C'est cette propriété qui a motivé l'introduction des chats : ils ne distinguent pas les imaginaires des hyperimaginaires. Même si au départ vous utilisez la négation, il faut apprendre à vous en passer si vous faites un quotient par une relation d'équivalence infiniment définissable (voir [Ben-Yaacov 2003]).

Nous dirons qu'un modèle M existentiellement clos d'une théorie h-inductive Ti , avec jocpe, est positivement ω-saturé si pour tout $\underline{a}$ de M , tout type existentiel positif, ayant $\underline{a}$ comme paramètres, est réalisé dans M ; autrement dit, tout type y est réalisé, et pour tout $\underline{a}$ de M et tout fermé $F(\underline{x},\underline{y})$ de l'espace $S_{m+n}(Ti)$, pour qu'il existe $\underline{b}$ dans M tel que $(\underline{a},\underline{b})$ soit dans le fermé F , il suffit que $\underline{a}$ appartiennent à la projection de F dans $S_m(Tu)$; dans un modèle positivement ω-saturé les fermés non vides des espaces de types ont des points, et la projection du fermé $F(\underline{x},\underline{y})$ est défini par la formule $(\exists\ \underline{y})$ $F(\underline{x},\underline{y})$. Les domaines κ-homogènes-universels de Ti , dès que κ est strictement supérieur au cardinal de l'ensemble des fermés des espaces de types, sont positivement ω-saturés, si bien que les existentiellement clos positivement ω-saturés peuvent être amalgamés.

Considérons donc un modèle existentiellement clos positivement ω-saturé M de Ti ; notons L' le langage obtenu en nommant chacun des fermés des espaces de types, et Ti' la théorie h-inductive de la L'-structure M' associée à M . Si $F(\underline{x})$ et $G(\underline{x})$ sont des fermés de $S_n(Tu)$, dans les modèles de Ti' , les fermés $F \cap G$ et $F \cup G$ seront interprétés respectivement par les formules $F(\underline{x}) \wedge G(\underline{x})$ et $F(\underline{x}) \vee G(\underline{x})$, car cela se traduit par des énoncés h-inductifs satisfaits par M' ; pour la même raison, la projection du fermé $F(\underline{x},\underline{y})$, qui est défini par la formule $(\exists\ \underline{y})\ F(\underline{x},\underline{y})$ dans M , est défini par cette même formule dans les modèles de Ti' .

Lemme 25. *Les modèles existentiellement clos de* Ti' *sont tous positivement* ω-*saturés dans leur propre langage* L' *; ils correspondent, par changement de langage, aux modèles existentiellement clos positivement* ω-*saturés de* Ti .

Démonstration. On observe qu'un sous-ensemble définissable de M' (par une formule positive de L') est infiniment définissable dans M (par une infinité de formules positives de L) : pour ce qui est des formules atomiques, ou de leur combinaisons booléennes positives, cela est clair, et quand il s'agit du quantificateur existentiel, cela découle du fait que M est positivement ω-saturé. Réciproquement, tout sous-ensemble infiniment définissable de M est définissable dans M' par un seul symbole de relation. Par conséquence, les sous-ensembles infiniment définissables de M et de M' sont les mêmes. À partir de maintenant on ne parlera donc que de parties infiniment définissables de M .

Considérons un type de $S_n(Ti')$: par définition, c'est un ensemble de formules de L' en n variables dont chaque partie finie est réalisée dans M' , et maximal en tant que tel. Comme M est positivement ω-saturé, un tel ensemble est réalisé dans M' . En d'autres mots, un type de $S_n(Ti')$ n'est qu'une partie infiniment définissable non vide minimale de M^n , ce qui est précisément un type de $S_n(Ti)$. Les théories Ti et Ti' ont donc les mêmes espaces de types, munis des mêmes topologies (les fermés correspondant aux parties infiniment définissables).

Soit maintenant N un autre modèle existentiellement clos positivement -saturé de Ti , et N' la L'-structure associée. Comme chaque uple de N réalise un type existentiel complet de Ti , il réalise dans N' le type existentiel complet correspondant de Ti' . Comme tout uple de N' réalise un type existentiel complet, N' est un modèle existentiellement clos de Ti' .

Réciproquement, soit N' est un modèle existentiellement clos de Ti' . Comme tout fermé de $S_n(Ti')$ est définissable par une seule formule, N' est automatiquement positivement ω-saturé. Comme Ti' dit que le fermé correspondant au graphe d'un symbole de fonction de L définit en effet un graphe, on peut récupérer une structure N du langage L . Appliquant la correspondance de types dans l'autre sens, N est un modèle existentiellement clos et positivement ω-saturé de Ti , ce qui conclut la démonstration. **Fin**

En conclusion, Ti et Ti’ ont, au langage près, les mêmes domaines κ-homogènes-universels, pour tout cardinal κ assez gros ; si nous ne nous intéressons qu’au gros domaines universels, nous sommes prêts à abandonner à leur sort les modèles qui ne sont pas positivement ω-saturés, puisque les théories Ti et Ti’ définissent le même chat. Quelles que soient nos convictions en la matière, nous sommes bien obligés d’admettre que, en Logique positive, ce n’est pas une propriété remarquable que d’avoir chaque fermé défini par une formule.

La morlèisation topologique définit un langage canonique, et maximal, pour un chat, ce qui explique que ses domaines universels soient déterminés, au langage près, par ses espaces de types (voir [Ben-Yaacov 2003]) et rappelle les beaux jours de la Logique algébrique (voir [Daigneault-Monk 1963]), où l'on reconstruisait les structures à partir des algèbres de formules. Pour un chat classique, le langage naturel est celui des ouverts-fermés, qui le fait apparaître comme la famille des espaces de types d'une théorie complète.

Un exemple trivial

Nous n'avons pas truffé notre exposé d'exemples et de contre-exemples, puisqu'on en trouve en abondance dans les œuvres du premier auteur que nous citons. Par exception, nous en donnons un très simple pour illustrer la morlèisation topologique (Lemme 25).

Considérons un langage L comprenant, outre l'égalité, une infinité de prédicats $P_0(x)$, $P_1(x)$, … $P_n(x)$, … , ainsi que la théorie Tu h-universelle complète déclarant qu'il sont deux-à-deux disjoints. Dans un de ses modèles, si un point n'est dans aucun des P_n , on peut le continuer dans n'importe quel P_m ; par ailleurs, rien ne force les points du même P_n à être distincts, si bien qu'il n'y a qu'un seul modèle existentiellement clos, qui comprend un point et un seul dans chaque P_n , réalisant le type p_n . La théorie Tk déclare qu'aucun P_n n'est vide ; un point d'un de ses modèles qui ne satisfait aucun des P_n peut se continuer au choix dans P_0 ou dans P_1 , ce qui est un obstacle à l'amalgamation. Et effectivement les espaces de types ne sont pas séparés : les seuls fermés propres de l'espace S_1 sont ses parties finies. Dans un modèle existentiellement clos de Tu , deux uples ont même type si et seulement si ils sont égaux, ce qui est une condition fermée : les chats qui ont cette propriété ont été qualifiés de semi-Hausdorff dans [Ben-Yaacov 2003]. Un chat semi-Hausdorff est gras.

Ajoutons au langage un prédicat P_1' , et à la théorie les axiomes h-inductifs déclarant qu'il est le complément de P_1 ; l'unique modèle existentiellement clos ne change pas, ni non plus l'ensembles des types, mais ils ont une topologie plus fine, puisque p_1 devient isolé. Nous pouvons continuer à renforcer ces topologies en introduisant des compléments aux P_n ; tant qu'il en reste deux sans complément, elles ne sont pas séparées.

Si nous ajoutons toutes les négations des P_n , sauf celle de P_0 , nous avons toujours le même unique modèle existentiellement clos et les mêmes types, mais le chat devient compact, et même totalement discontinu : les p_n , pour $n > 0$, sont isolés, et s'accumulent sur p_0 . Comme dans tous les exemples présentés ici, les projections entre espaces de types sont ouvertes, si bien que la seule chose qui manque à ce chat pour être classique, c'est que l'égalité n'y est pas ouverte.

Introduisons donc un symbole pour l'inégalité, et les axiomes déclarant que chaque P_n contient une infinité d'éléments ; il s'agit de l'enveloppe de Kaiser de la théorie h-universelle qui déclare seulement que les P_n sont disjoints, et que l'inégalité est disjointe de l'égalité. Ajoutons des compléments à certains des P_n ; tant qu'il en reste un sans complément, les modèles existentiellement clos ne contiennent pas de points en dehors de la réunion des P_n , et les ensembles de types sont toujours les mêmes. S'il y a deux P_n sans complément, le chat n'est pas séparé ; il n'est même pas gras, car on ne peut exprimer par une condition fermée que tous les éléments d'une suite ont le même type.

Si tous les P_n , sauf P_0 , sont complémentés, le chat est classique. Il correspond à la théorie négationniste complète T , dans le langage P_1 , … P_n , … (sans P_0), qui déclare que ces prédicats sont infinis et disjoints. P_0 n'y est pas définissable, mais seulement infiniment définissable ; il est nommé par la morlèisation topologique de T , qui déclare qu'il est infini ; on voit bien qu'elle ne convient qu'aux modèles de T qui sont -saturés.

Il est cependant possible de retrouver les anciens modèles non saturés à partir de la seule topologie des espaces de types : ce sont les sous-ensembles M des domaines universels pour lesquels les types réalisés par des éléments de M forment une partie dense de l'espace des types sur M . Mais ceci est une autre histoire, racontée dans [Ben-Yaacov 2005].

Références

[Ben-Yaacov 2003] Itay BEN-YAACOV, *Positive model theory and compact abstract theories,* **J. of Mathematical Logic,** vol. 3, 85-118

[Ben-Yaacov 2003bis] Itay BEN-YAACOV, *Simplicity in compact abstract theories,* **Journal of Mathematical Logic,** vol. 3, 163-191

[Ben-Yaacov 2003ter] Itay BEN-YAACOV, *Thickness, and a categoric point of view of type-space functors,* **Fundamentae Mathematicae,** vol. 179, 199-224

[Ben-Yaacov 2004] Itay BEN-YAACOV, *Lovely pairs of models : the non first order case,* **the Journal of Symbolic Logic,** vol. 69, 641-662

[Ben-Yaacov 2005]Itay BEN-YAACOV, *Uncountable dense categoricity in cats,* **the Journal of Symbolic Logic,** vol. 70, 829-860

[Ben-Yaacov & Usvyatsov 20??] Itay BEN-YAACOV & Alexander USVYATSOV, *Continuous first order logic and local stability*

[Chang & Keisler 1973] CHANG Cheng-Chung & Jerome H. KEISLER, **Model theory,** North-Holland

[Daigneault & Monk 1963] Aubert DAIGNEAULT & Donald MONK, *Representation theory for polyadic algebras,* **Fund. Math.**, vol. 52, 151-176

[Fraïssé 1953] Roland FRAISSE, *Sur certaines relations qui généralisent l'ordre des nombres rationnels,* **C.R. Acad. Sci. Paris,** vol. 237, 540-542

[Hodges 1993] Wilfrid HODGES, **Model Theory,** Cambridge University Press

[Hrushovski 1997] Ehud HRUSHOVSKI, *Simplicity and the Lascar group,* prépublication.

[Jonsson 1956] Bjarni JONSSON, *Universal relational systems,* **Mathematica Scandinavia,** vol. 4, 193-208.

[Jonsson 1960] Bjarni JONSSON, *Homogeneous universal relational systems,* **Math. Scand.,** vol. 8, 137-142

[Kaiser 1969] Klaus Kaiser, *Über eine Verallgemeinerung der Robinsonschen Modell-vervollständigung,* **Z. Math. Logik Grundlagen Math.,** vol.15, 37-48

[Los & Suszko 1957] Jerzy LOS & R. SUSZKO, *On the extending of models (IV),* **Fundamenta Mathematicae,** vol. 44, 343-347

[Morley & Vaught 1962] Michael MORLEY & Robert VAUGHT, *Homogeneous universal models,* **Mathematica Scandinavia,** vol. 11, 37-57

[Mustafin & Nurkhaidarov 1995] Tölende MUSTAFIN & Ermek NURKHAIDAROV, *Description des théories de Jonsson de polygônes sur un groupe* (en russe), **Sbornik nauchnyh trudov** (Qaragandy), 67-73

[Mustafin 1998] Tölende MUSTAFIN, *Conditions de Jonsson généralisées et théories de Jonsson généralisées d'algèbres de Boole* (en russe), **Math. Trudy** (Novosibirsk), 135-197 ; traduit en anglais dans **Siberian Advances in Mathematics,** vol. 10, 2000, 1-58

[Mustafin 2002] Yerulan MUSTAFIN, *Quelques propriétés des théories de Jonsson,* **The Journal of Symbolic Logic,** vol. 67, 528-536

[Pillay 2000] Anand PILLAY, *Forking in the category of existentially closed structures,* **Quaderni di Matematica,** vol. 6,

[Poizat 20 ??] Bruno POIZAT, *Univers positifs*

[Pouzet 1972] Maurice POUZET, Modèle universel d'une théorie n-complète, **C. R. Acad. Sc. Paris,** série A, vol. 274, 813-816

[Robinson 1956] Abraham ROBINSON, **Complete Theories,** North Holland

[Shelah 1975] Saharon SHELAH, *The lazy model-theoretician guide to stability*, **Logique et Analyse,** vol. 71-72, 241-308

[Tarski 1949] Alfred TARSKI, *Arithmetical classes and types of mathematical systems,* Abstracts **Bull. Amer. Math. Soc.,** vol. 55, 1192

[Tarski &Vaught 1957] Alfred TARSKI & Robert VAUGHT, *Arithmetical extensions of relational systems,* **Compositio Mathematica,** vol. 13, 81-102