Université Claude Bernard Lyon I
Licence deuxième année : Algèbre IV
Jeudi 5 juin 2014

Partiel Algèbre IV

—

Durée : 2H. Aucun document n'est autorisé
Les exercices ont un poids égal

Exercice 1. Dans cet exercice on travaillera dans $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que c'est un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormée pour ce produit scalaire.
3. Soit $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est la suivante :
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que f est auto-adjoint pour le produit scalaire donné plus haut.
(Indication : on pourrait certes utiliser la base orthonormée trouvée plus haut, mais il y a une méthode bien plus rapide.)

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire standard. Pour $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on rappelle que $\ker C = \{X \in \mathbb{R}^n : CX = 0\}$ et $\mathrm{img}\, C = \{CX : X \in \mathbb{R}^n\}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\ker A \supseteq \ker({}^tAA)$. (Indication : on pourrait considérer $\|AX\|$.)
2. Déduire que $\ker A = \ker({}^tAA)$.
3. Montrer que $\ker({}^tA) = (\mathrm{img}\, A)^\perp$.

Exercice 3. Dans cet exercice nous travaillerons dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est une matrice orthogonale.
2. Déterminer le sous-espace $F = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = X\}$ (l'espace des points fixes).
3. Calculer $\det A$.
4. Déduire que A est le produit de trois réflexions, et qu'il est impossible de l'écrire comme produit de strictement moins de 3 réflexions.

Exercice 4. Soient A, B, C, D quatre points distincts dans l'espace affine réel.

On définit P, Q, R, S tels que $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{CQ} = \frac{1}{3}\vec{CB}$, $\vec{CR} = \frac{1}{3}\vec{CD}$ et $\vec{AS} = \frac{1}{3}\vec{AD}$.

1. Montrer que les segments PR et QS s'intersectent en leurs milieux.
2. Soit X ce point d'intersection. Exprimer X comme barycentre des points A, B, C, D.