Université Claude Bernard Lyon I
Licence deuxième année : Algèbre IV
Jeudi 27 mars 2014

Partiel Algèbre IV

—

Durée : 2H. Aucun document n'est autorisé

Exercice 1. (8 pts) On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Ensuite on définit la fonction suivante :

$$q \; : \; \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 2xy - xz + 2yz \end{array} ,$$

où (x, y, z) sont les coordonnées d'un point de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$. On admettra que c'est une forme quadratique.

1. (2 pts) Déterminer la forme polaire de q et sa matrice dans la base canonique.
2. (3 pts) Déterminer une base orthogonale pour q.
3. (3 pts) Déterminer trois vecteurs isotropes et linéairement indépendants. En déduire que le cône isotrope de que n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 2. (8 pts) On se met dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Ensuite on définit la fonction suivante :

$$q \; : \; \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 2x^2 + y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz \end{array} ,$$

où (x, y, z) sont les coordonnées d'un point de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$. On admettra que c'est une forme quadratique.

1. (2 pts) Déterminer la forme polaire de q et sa matrice dans la base canonique.
2. (3 pts) Déterminer une base orthogonale pour q.
3. (1 pt) Quelle est la signature de q ?
4. (2 pts) Déterminer $(1, -2, 1)^{\perp}$.

Exercice 3. (Un peu de théorie) (4 pts) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et q une forme quadratique non-dégénérée sur E. Montrer qu'aucune base orthogonale de E ne contient un vecteur isotrope.