Université Claude Bernard Lyon I
Licence deuxième année : Algèbre IV
Mardi 2 juin 2015

Partiel Algèbre IV

—

Durée : 2H. Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 (Questions du cours)**.**

1. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Soit E un espace euclidien, $f\colon E \to E$ une transformation linéaire. Rappeler la définition de l'adjoint f^*.
3. Rappeler la définition d'une matrice orthogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Est-il possible que $\det(A)$ soit égal à 3 ?

Exercice 2. On munit $\mathbf{R}^4$ du produit scalaire usuel. On pose

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 2, -1, -2), \\ u_2 &= (2, 3, 0, -1), \\ u_3 &= (5, -2, -5, -2), \\ \text{et } F &= \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) \subseteq \mathbf{R}^4. \end{aligned}$$

Trouver une base orthonormée de F.

Exercice 3. Dans cet exercice, pour chaque question on peut admettre les questions précédentes.

On munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire standard $\langle X, Y\rangle = {}^tXY = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice inversible.

1. Justifier que $\mathbf{R}^n$ admet une base orthonormée $\mathcal{B} = \{U_1, \ldots, U_n\}$, telle que chaque U_i est un vecteur propre de la matrice ${}^tAA$. On notera λ_i la valeur propre correspondante.
2. Justifier que $\|AU_i\|^2 = \lambda_i > 0$ pour chaque i.
3. Posons $V_i = AU_i/\sqrt{\lambda_i}$. Justifier que la famille $\{V_1, \ldots, V_n\}$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$.
4. Justifier que V_i est un vecteur propre (non nul) de $A\,{}^tA$ pour chaque i. Quelle est la valeur propre correspondante ?
5. **(Question bonus)**
Soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice dont les colonnes sont $V_1, \ldots, V_n$.
Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice dont les colonnes sont $U_1, \ldots, U_n$.
Soit $\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$.
Justifier que U et V sont des matrices orthogonales et que $A = V\Lambda {}^tU$.

Exercice 4. Soit $E \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de trace nulle, et soit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de trace 1.

1. Pour $A, B \in \mathcal{E}$ on pose $\overrightarrow{AB} = B - A$. Montrer que $\overrightarrow{AB} \in E$ et que $\mathcal{E}$ est un espace affine dirigé par E.
2. Montrer que l'application $t\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $t(A) = {}^tA$ est une application affine.