Université Claude Bernard Lyon I
Licence deuxième année : Algèbre IV
Mardi 7 juin 2016

Partiel Algèbre IV

—

Durée : 2H. Aucun document n'est autorisé
Ce sujet comporte 5 exercices de poids égal

Exercice 1 (Questions du cours)**.**
1. Rappeler la définition de la norme dans un espace euclidien.
2. Démontrer l'identité du parallélogramme : si E est un espace euclidien, alors pour tous $x, y \in E$:
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$
3. Montrer qu'une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée pour le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Soit $q\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ l'application suivante :
$$q(x,y,z) = x^2 - 2xy - 2y^2 - 6xz - 6yz$$
Nous admettons que ceci est une forme quadratique.
1. Trouver la matrice de q dans la base canonique.
2. Déterminer le rang de q, son noyau et sa signature.
3. Trouver une base orthogonal pour q et la matrice de q dans cette base.

Exercice 3 (Endomorphismes auto-adjoints et leurs valeurs propres)**.** Dans ce problème, E est un espace euclidien et (u_1, u_2) est une base de E.
1. Pour $v \in E$ posons
$$f(v) = \langle u_1, v\rangle u_1 + \langle u_2, v\rangle u_2.$$
Montrer que $f\colon E \to E$ est un endomorphisme auto-adjoint.
2. Déduire que E admet une base orthonormée (e_1, e_2) qui consiste en des vecteurs propres de f : $f(e_i) = \lambda_i e_i$.
3. Montrer que $\langle v, f(v)\rangle > 0$ pour tout $v \in E \setminus \{0\}$.
4. Déduire que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, et que f est inversible.

Tournez SVP

Exercice 4 (Transformations orthogonales dans $\mathbb{R}^3$)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard. Soit A la matrice

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \\ 3 & 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est une matrice orthogonale.
2. Montrer que A n'est pas une rotation, ni une réflexion.
3. Déduire que le nombre minimal de réflexions dont le produit est A, est 3.

Exercice 5 (Parallélogrammes)**.** Considérons quatre points A, B, C, D dans le plan affine $\mathcal{E}$, et supposons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
2. Considérons quatre autres points A', B', C', D' tels que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$. Soit $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine qui envoie A, B, C sur A', B', C', respectivement. Montrer que $\varphi(D) = D'$.