Université Claude Bernard Lyon I
Licence deuxième année : Algèbre IV
Jeudi 17 mars 2016

# Partiel Algèbre IV

—

**Durée : 1H30. Aucun document n'est autorisé**
**Ce sujet comporte deux parties**

## Partie I. Formes quadratiques

**Exercice 1** (Questions du cours)**.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-e.v., $q$ une forme quadratique sur $E$.

1. Rappeler la définition du noyau de $q$. Est-ce toujours un s.e.v. de $E$ ?
2. Rappeler la définition du cône isotrope de $q$. Est-ce toujours un s.e.v. de $E$ ?

**Exercice 2.** On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Ensuite on définit la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} q & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y, z) & \longmapsto & x^2 + 4xy + 2xz + 6yz + z^2 \quad , \end{array}$$

On admettra que c'est une forme quadratique.

1. Déterminer la forme polaire de $q$, que l'on notera $\varphi_q$, ainsi que la matrice de $q$ dans la base canonique.
   Vous pouvez utiliser toute méthode pour trouver $\varphi_q$, à condition de l'expliquer.
2. Déterminer la signature de $q$, son rang et son noyau.
3. Déterminer une base orthogonale pour $q$, que l'on notera $(v_1, v_2, v_3)$.
4. Déterminer la matrice de $q$ dans la base $(v_1, v_2, v_3)$.
5. La forme $q$ admet-elle des vecteurs isotropes non nuls ? Si non, justifier. Si oui, en trouver un.

## Partie II. Espaces euclidiens

**Exercice 3** (Questions du cours)**.** Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (y compris le cas d'égalité).

**Exercice 4.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard : $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.
Posons :

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, -2) \\ v_2 &= (2, 4, -6) \\ F &= \mathrm{Vect}(v_1, v_2). \end{aligned}$$

1. Trouver une base orthonormée pour $F$.
2. Trouver une base orthonormée pour $F^\perp$.