Université Claude Bernard Lyon I
Licence deuxième année : Algèbre IV
Lundi 26 juin 2017

Algèbre IV - contrôle terminal session 2

—

Durée : 1H30. Aucun document n'est autorisé

Exercice 1. Soit E un espace affine dont on note $\overrightarrow{E}$ l'espace directeur. Soient A et B deux points de E. Soit f l'application de E dans E telle que pour tout $M \in E$,

$$\overrightarrow{Mf(M)} = 4\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM}.$$

1. Pour tous $M, N \in E$, exprimer $\overrightarrow{f(M)f(N)}$ en fonction de $\overrightarrow{MN}$.
2. En déduire que f est affine.
3. Montrer que f admet un unique point fixe qu'on déterminera en fonction de A et B. On notera I ce point fixe.
4. À l'aide des questions précédentes, déterminer la nature géométrique de f.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel euclidien et F, G deux sous espaces vectoriels. On considère p et r les projections orthogonales sur F et G respectivement.

1. On rappelle qu'un endomorphisme $s\colon E \to E$ est appelé **projecteur** si $s \circ s = s$ et que, dans ce cas, $E = \mathrm{Im}(s) \oplus \ker(s)$ et que s est la projection sur $\mathrm{Im}(s)$ parallèlement à $\ker(s)$.
   Soit s un projecteur. Montrer que s est un projecteur orthogonal si et seulement si, il est autoadjoint.
   [Attention : un **projecteur orthogonal** est un projecteur s tel que $\mathrm{Im}(s) \perp \ker(s)$ – ce n'est pas la même chose qu'un projecteur qui est aussi un endomorphisme orthogonal !]
2. Dans cette question, on suppose que p et r commutent.
   (a) Prouver que $p \circ r$ est un projecteur.
   (b) Montrer que l'image de $p \circ r$ est $F \cap G$.
   (c) Conclure en prouvant que $p \circ r$ est un projeteur orthogonal sur $F \cap G$.
3. Montrer que si $p \circ r$ est un projecteur orthogonal alors p et r commutent.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 2. Pour $P, Q \in E$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3).$$

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

Soient $P_1 = \dfrac{1}{2}(X-2)(X-3)$, $P_2 = (X-1)(X-3)$ et $P_3 = \dfrac{1}{2}(X-1)(X-2)$

2. Montrer que les P_i forment une base orthonormée de l'espace euclidien E.
3. Soit $T \in E$. Déterminer les coordonnées de T dans la base des P_i en fonction de $T(1), T(2), T(3)$.
4. Soit $F = \mathrm{Vect}\{1, P_1\}$.
   (a) Déterminer une base de $F^{\perp}$ l'orthogonal de F.
   (b) Déterminer le projeté orthogonal de $R = X$ sur F.