Université Claude Bernard Lyon I
Licence deuxième année : Algèbre IV
Jeudi 23 mars 2017

Partiel Algèbre IV

—

Durée : 1H30. Aucun document n'est autorisé

Il est fortement conseillé de vérifier les résultats des calculs

Exercice 1 (Questions du cours)**.**

1. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. Définir l'endomorphisme adjoint f^*.
2. Définir quand f est auto-adjoint.
3. Énoncer le théorème spectral.

Exercice 2. Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux. Si vrai donner une preuve **courte** (moins d'un paragraphe). Si faux, donner un contre-exemple.

1. Si $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ sont symétriques alors $A + B$ est symétrique.
2. Si $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ sont symétriques alors AB est symétrique.
3. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire standard.
   Si deux applications linéaires $f, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont auto-adjoints alors $f + g$ est auto-adjoint.
4. Si deux applications linéaires $f, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont auto-adjoints alors $f \circ g$ est auto-adjoint.

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard : $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.
Posons :

$$\begin{aligned} v_1 &= (-1, 0, 1) \\ v_2 &= (2, 1, 1) \\ F &= \mathrm{Vect}(v_1, v_2). \end{aligned}$$

1. Trouver une base orthonormée pour F.
2. Trouver une base orthonormée pour $F^\perp$.
3. Soit $e_1 = (1, 0, 0)$. Calculer $p_F(e_1)$, le projeté orthogonal de e_1 sur F.
4. Calculer la distance de e_1 à F.
5. Calculer la distance de e_1 à $F^\perp$.

Exercice 4. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que u est autoadjoint pour le produit scalaire usuel.
2. Justifier (sans calcul) l'existence d'une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.
3. Expliciter cette matrice.