2. Espaces préhilbertiens complexes

(parallèle au cas réel)

Rappel : Si E est un $\mathbb{R}$-e.v. : Un pr. scalaire sur E est une forme $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$

qui est : I. Symétrique
II. Lin. en le 2e arg
III. Déf. pos $\forall x \neq 0 : \langle x, x \rangle > 0$.

} $\Rightarrow$ aussi lin en le 1er arg $\Rightarrow$ "bilinéaire".

Ça ne peut pas marcher si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

En effet $x \in E \setminus \{0\}$. Si $\langle x, x \rangle > 0$

$\Rightarrow$ $ix \in E \setminus \{0\}$ et $\langle ix, ix \rangle = i^2 \langle x, x \rangle = -\langle x, x \rangle < 0$.

Il faut "sacrifier" l'une des 3 propriétés.

Définition : Soit E un $\mathbb{C}$-e.v.
Un produit scalaire sur E (on l'appelle parfois un produit hermitien) est une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$$

↖ les scalaires : c'est donc une forme

qui vérifie :

I. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est ~~Symétrique~~ hermitienne :

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$

(le conjugué complexe de $\langle x, y \rangle$)

II. Lin en le 2e arg. :

$$\langle x, y + \alpha y' \rangle = \langle x, y \rangle + \alpha \langle x, y' \rangle.$$

III. Définie positive :

[D'abord : $\forall\ x \in E$: $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$

par I.

$\Uparrow$

$\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$]

On exige que $\forall x \in E \setminus \{0\}$: $\langle x, x\rangle > 0$.

Hermitienne + lin en le 2e argument

$\Rightarrow$ semi-linéaire en le 1er arg :

$x, x', y \in E$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$\langle x + \alpha x', y\rangle = \overline{\langle y, x + \alpha x'\rangle}$

$= \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\alpha}\,\overline{\langle y, x'\rangle}$

$= \langle x, y\rangle + \overline{\alpha}\langle x', y\rangle$

Un produit hermitien n'est pas bilinéaire mais "une fois et demi-linéaire"

= sesquilinéaire

= linéaire en le 2e arg et semi-lin en le 1er.

Exemples :

I Le produit hermitien standard sur $\mathbb{C}^n$:

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$.

$\langle X, Y\rangle = \sum \overline{x_i}\, y_i = {}^t\overline{X}\, Y$

II. $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$$

Mq I. est bien un pr hermitien :

- Hermitien : $\langle Y, X \rangle = \sum \overline{y_i}\, x_i$

$= \overline{\sum x_i y_i} = \overline{\langle X, Y \rangle}$

- Lin en Y : .... ✓

- Déf pos : $\langle X, X \rangle = \sum \overline{x_i}\, x_i = \sum |x_i|^2$.

$t_j \geq 0$ et > 0 dès que l'un des x_i est $\neq 0$.

Donc : Si $X \neq 0$, alors $\langle X, X \rangle > 0$.

Exo : Mq II est un produit hermitien sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$.

Définition Un $\mathbb{C}$-es. vect. muni d'un produit hermitien s'appelle un espace préhilbertien complexe

Notation : Soit E un esp. préh. complexe, $x \in E$. On note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

On ne sait pas encore que c'est une norme !

quelques calculs :

$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \langle \alpha x, x \rangle = \overline{\alpha} \alpha \langle x, x \rangle$

$= |\alpha|^2 \|x\|^2$.

$\Rightarrow \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$

$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$

$= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2$.

$= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$.

Thm : Inégalité de Cauchy - Schwarz :

Soit E un esp. préhilbertien complexe

alors $\forall x, y \in E$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Et on a égalité ssi x et y sont colinéaires.

Preuve : Essayons de répéter la preuve du cas réel.

2 cas : 1er cas $x = 0$: $|\langle \overset{\circ}{x}, y \rangle| = 0 = \overset{\circ}{\|x\|} \|y\|$

et $x = 0$, y sont colinéaires.

Comme dans le cas réel :

$\langle 0_E, y \rangle = \langle \underset{\mathbb{C}}{0} \cdot 0_E, y \rangle = \overline{0} \cdot \langle 0, y \rangle = 0$.

Donc : $\forall x \in E$: $x = 0 \iff \forall y \in E \ \langle x, y \rangle = 0$

$\iff \langle x, x \rangle = 0 \iff \|x\| = 0$

2e cas : $x \neq 0$.

pour $t \in \mathbb{R}$ posons $f(t) = \langle tx+y, tx+y \rangle = \|tx+y\|^2$

d'un côté : $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

d'un autre :

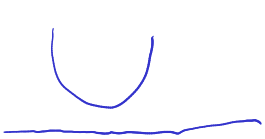
$$f(t) = \|tx+y\|^2 = \|tx\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle tx, y\rangle) + \|y\|^2$$

$$= |t|^2 \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{t}\langle x, y\rangle) + \|y\|^2$$

car $t \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $= \|x\|^2 t^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)\, t + \|y\|^2$

$$= at^2 + bt + c$$

ce $= \|x\|^2 > 0$ ($x \neq 0$!)

$\Rightarrow$ graphe de f =  ou

Mais non

car $f(t) \geq 0 \quad \forall t$.

$\Leftrightarrow$ f admet au plus une racine réelle

$\rightarrow$ $0 \geq \Delta = b^2 - 4ac$

$$= 4\left(\mathrm{Re}\langle x, y\rangle\right)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$$

$\Leftrightarrow$ $\left(\mathrm{Re}\langle x, y\rangle\right)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$

$\Leftarrow$ $|\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)| \leq \|x\|\,\|y\|$.

Presque ce que nous voulions

chaque $\alpha \in \mathbb{C}$ admet une décomposition polaire : $\alpha = \alpha_1 |\alpha|$ où : $|\alpha_1| = 1$.

par exemple : $\alpha_1 = \begin{cases} \frac{\alpha}{|\alpha|} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$

En particulier : $\langle x,y\rangle = \alpha\, |\langle x,y\rangle|$

avec $|\alpha| = 1$.

Le même résultat pour αx, y :

$$\underbrace{|\mathrm{Re}\,\langle \alpha x, y\rangle|}_{|\langle x,y\rangle|} \leq \underbrace{\|\alpha x\|}_{\|x\|}\,\|y\|.$$

- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| = \|x\|$.

- $\langle \alpha x, y\rangle = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle$

$= \bar{\alpha}\cdot\alpha\,|\langle x,y\rangle| = |\alpha|^2 |\langle x,y\rangle|$

$= |\langle x,y\rangle|$.

$\Rightarrow \mathrm{Re}\,\langle \alpha x, y\rangle = |\langle x,y\rangle|$

$\Rightarrow |\ \ldots\ | = |\langle x,y\rangle|$.

D'où : $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$.

cas d'égalité :

si on a égalité : le discriminant de $f(t) = \|t\alpha x + y\|^2$ est nul

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tq $\underline{f(t) = 0}$.

c'à d : $\|t\alpha x + y\| = 0$

$\Downarrow$

$y = -t\alpha x$.

et x, y sont colinéaires.

Réciproquement : s'ils sont colinéaires :

$\exists \beta \in \mathbb{C}$ tq $y = \beta x$

$\Rightarrow |\langle x, y \rangle| = |\beta| \|x\|^2 = \|x\| \cdot \|y\|$.

(vérifier les détails).

Corollaire : Soit E un esp. préh. complexe.

alors $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est bien une norme sur E

preuve : identique au cas réel.

c'est la norme associée au produit hermitien.

Formule de polarisation :

On a calculé :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,-y\rangle + \|-y\|^2$$

$$= \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2.$$

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle.$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right].$$

$\alpha = a+bi \in \mathbb{C}$ $\quad a,b \in \mathbb{R}$.

$-i\alpha = \bar{i}\alpha = b - ai$

$a = \mathrm{Re}\,\alpha$, $\quad b = \mathrm{Im}\,\alpha = \mathrm{Re}(\bar{i}\cdot\alpha)$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\langle x,y\rangle = \mathrm{Re}\left(\bar{i}\cdot\langle x,y\rangle\right)$$

$$= \mathrm{Re}\langle ix,y\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\left[\|ix+y\|^2 - \|ix-y\|^2\right]$$

$$\langle x,y\rangle = \mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle + i\,\mathrm{Im}\,\langle x,y\rangle$$
$$= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|ix+y\|^2 - i\|ix-y\|^2\right]$$

Formule/Identité de polarisation pour un produit hermitien

Identité du parallélogramme :
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(identique au cas réel).

Exo : On peut munir $\mathbb{C}^n$ des normes : $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Ces normes ne vérifient pas l'identité du parallélogramme $\Rightarrow$ ne sont pas associées à aucun produit hermitien (ce ne sont pas des normes hermitiennes)

Par contre la norme $\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2} = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ est la

norme associée au pr. hermitien standard sur $\mathbb{C}^n$.

Comparaison du cas réel avec le cas complexe : presque toutes les formules du cas complexe sont valables aussi dans le cas réel.

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ $\left(= \overline{\langle y,x\rangle}\right)$ car $\langle y,x\rangle \in \mathbb{R}$	$\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$
$\langle x, y+\alpha y'\rangle = \langle x,y\rangle + \alpha\langle x,y'\rangle$	
$\langle x+\alpha x', y\rangle = \langle x,y\rangle + \alpha\langle x',y\rangle$ $\left(= \langle x,y\rangle + \bar{\alpha}\langle x',y\rangle\right.$ car $\left.\alpha \in \mathbb{R}\right)$	$\langle x+\alpha x', y\rangle = \langle x,y\rangle + \bar{\alpha}\langle x',y\rangle$

$\Leftarrow \quad \forall x \neq 0 \quad \langle x,x\rangle > 0$

$\Leftarrow \quad \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

$\Leftarrow \quad$ C.S

parallélogramme :

$\Leftarrow \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

polarisation :

$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right\}$

$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$

$\rightarrow$ $\langle x,y\rangle$ = plus longue

(seul cas où on ne peut pas juste utiliser une formule du cas complexe dans le cas réel.

p- scalaire standard :

$\mathbb{R}^n$

$\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$

$\left(= \sum \overline{x_i} y_i \right.$

$\left.\text{car } x_i \in \mathbb{R}\right)$

$\mathbb{C}^n$

$\langle x, y \rangle = \sum \overline{x_i} y_i$

---

2 définition :

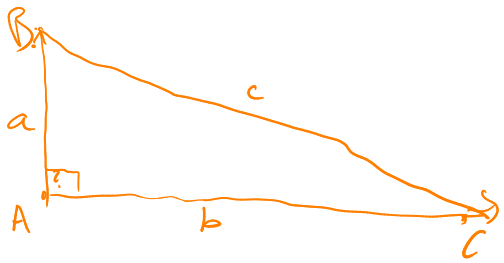
I. Un espace préhilbertien réel de dimension finie s'appelle un espace euclidien

II. Un espace préhilbertien complexe de dim finie s'appelle un espace hermitien.

15m pause => 11h30.

Chapitre 2 : Orthogonalité.

Motivation (pour donner une idée intuitive)



quand est-ce que $\widehat{BAC}$ est droit ?

Pythagore : $\widehat{BAC}$ est droit

$\Leftrightarrow$

$a^2 + b^2 = c^2$

$\|\overrightarrow{AB}\|_2^2 + \|\overrightarrow{AC}\|_2^2 = \|\overrightarrow{BC}\|_2^2$. où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne :

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

or : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle + \|\overrightarrow{AB}\|^2.$$

d'où $\widehat{BAC}$ est droit $\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0$.

Définition : Soit E un esp. préhilb. (réel ou complexe), et soit $x, y \in E$.

On dit que x et y sont

orthogonaux (ou que x est orthogonal à y), et on note $x \perp y$

si $\langle x, y \rangle = 0$

(idée : $x \perp y \iff$

)

Observations.

I. Si $x \perp y$ alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

(Pythagore).

En effet : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$

(Par contre la réciproque ne marche que dans le cas réel)

II. $\forall x, y$: $x \perp y \iff y \perp x$ (car $\overline{0} = 0$)

III $\forall x$: $x \perp 0$ ($\langle x, 0\rangle = 0$)

IV. $\forall x$ $x \perp x \iff x = 0$

car : $\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$\langle x, x\rangle = 0 \iff \|x\| = 0$

Définition :

Une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ (éventuellement

famille infinie $(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ est dite :

I. Une famille orthogonale si $x_i \perp x_j$ $\forall i \neq j$.

II Une famille orthonormée si elle est orthogonale et $\|x_i\| = 1$ $\forall i$.

Exemples : I. Dans $\mathbb{R}^2$ (muni du produit scalaire standard) pour :

$x_1 = (a, b)$

$x_2 = (-b, a)$

alors $x_1 \perp x_2$

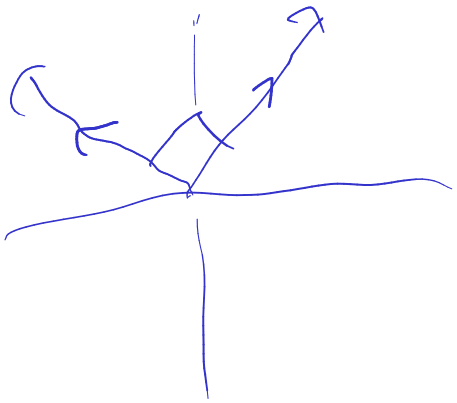
$(x_1, x_2) = -ab + ab = 0$

Donc (x_1, x_2) est une

famille orthogonale.

Il plus concrètement on peut prendre : $x_1 = (1,1)$

$x_2 = (-1,1)$



par contre :

$\|x_1\| = \|x_2\| = \sqrt{2}$.

donc (x_1, x_2) n'est pas une famille orthonormée

$\rightsquigarrow$ posons $y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{2}}$

$y_2 = \frac{x_2}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \|y_i\| = \frac{\|x_i\|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

et $y_1 \perp y_2$ (pourquoi ?)

$\Rightarrow$ (y_1, y_2) est une famille

orthonormée.

III. Dans $\mathbb{R}^n$ comme dans $\mathbb{C}^n$: La base standard

$(e_1 \dots e_n)$

$e_i = (0, \dots, \underset{\uparrow}{1}, 0 \dots 0)$
i

est orthonormée.

Observation bis : si $x \perp y$

alors $\alpha x \perp y$ car : $\langle \alpha x, y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle = 0$.

et pareil : $x \perp \alpha y$.

Prop. Toute famille orthogonale sans vecteur nul est libre.

En particulier toute famille o.n. (= orthonormée) est libre.

preuve: Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale sans vecteur nul.

Soit $\lambda_1 \dots \lambda_n$ des scalaires t.q. $\sum \lambda_i x_i = 0$.

alors : $\| - \|^2 = e$

i.e. : $0 = \left\langle \sum_i \lambda_i x_i , \sum_j \lambda_j x_j \right\rangle$

$$= \sum_j \lambda_j \left\langle \sum_i \lambda_i x_i , x_j \right\rangle$$

$$= \sum_j \lambda_j \left(\sum_i \overline{\lambda_i} \langle x_i , x_j \rangle \right)$$

$$= \sum_{i,j} \overline{\lambda_i} \lambda_j \langle x_i , x_j \rangle$$

$$= \sum_i \overline{\lambda_i} \lambda_i \langle x_i , x_i \rangle \quad \left[\text{car } \forall i \neq j : \langle x_i , x_j \rangle = 0 \text{ car } x_i \perp x_j \right]$$

$$= \sum_i |\lambda_i|^2 \, \|x_i\|^2$$

= somme de réels positifs ou nuls.

si $\exists i_0$ tq $\lambda_{i_0} \neq 0$:

$|\lambda_{i_0}|^2 > 0$ et $\|x_{i_0}\|^2 > 0$

on a supposé que les x_i sont tous non nuls.

$\Rightarrow |\lambda_{i_0}|^2 \|x_{i_0}\|^2 > 0$

$\Rightarrow \sum_i |\lambda_i|^2 \|x_i\|^2 > 0.$

contradiction.

Conclusion : $\lambda_i = 0 \quad \forall i$.

La famille $(x_1 - x_n)$ est donc libre.

Soit maintenant $(x_1 - x_n)$ une famille o.n. alors elle est orthogonale, et $\forall i : \|x_i\| = 1 \Rightarrow x_i \neq 0$.

c'est donc une famille orthog.
$\Rightarrow$ vect. nul $\Rightarrow$ libre.

Rmq Delta de Kronecker :

$$\delta_{ij} : \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

alors dire qu'une famille $(x_1 \dots x_n)$ est o.n revient à :

I $i \neq j \Rightarrow x_i \perp x_j \iff (x_i, x_j) = 0$

II $\|x_i\| = 1$ $(\iff (x_i, x_i) = 1)$

càd : $i = j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 1$

Autrement dit : $(x_1 \dots x_n)$ est o.n. ssi :

$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$: $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

Définition Soit $x \in E$, $A \subseteq E$
$B \subseteq E$.

alors $x \perp A$ si $x \perp y$ $\forall y \in A$.

et: $A \perp B$ si $y \perp z$ $\forall y \in A$
$\forall z \in B$.

ATTENTION:

Soit $A = (x_1 - x_n)$

$B = (y_1 - y_k)$.

$A \perp B$: " A est orthog à B"

$(=)$ $\forall i = 1, \ldots, n$ $x_i \perp y_j$
$j = 1, \ldots, k$

à ne pas confondre avec !

" A est une famille orthogonale "

$\Leftrightarrow \quad \forall i, j = 1, \dots, n$

si $i \neq j$ alors

$x_i \perp x_j$

Définition : Soit $A \subseteq E$.

On pose :

$$A^\perp = \{ x \in E : x \perp A \}.$$

Lorsque $A = F \subseteq E$ est un s.e.v. on appelle $F^\perp$ le **complémentaire**

orthogonal de F

Propriétés:

$x, y, \dots \in E$

$A, B, \dots \subseteq E$.

I. $x \perp A$

$\iff x \perp \mathrm{Vect}(A)$.

En effet: si $x \perp \mathrm{Vect}(A)$

et $y \in A$ alors $y \in \mathrm{Vect}(A)$

$\Rightarrow x \perp y$

conclusion: $x \perp A$.

Réciproquement: si $x \perp A$

et $y \in \mathrm{Vect}(A)$:

alors $\exists\, y_1, \dots y_k \in A$

et $\alpha_1, \dots \alpha_k$ scalaires

tq $y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i$.

donc : $\langle x, y \rangle$

$= \langle x, \sum_i \lambda_i y_i \rangle = \sum_i \lambda_i \underbrace{\langle x, y_i \rangle}_{=0}$

$= 0$ car $y_i \in A$.

et $x \perp A$.

donc : $x \perp y$

conclusion : $x \perp \text{Vect}(A)$.

II $A \perp B \iff B \perp A$.

car $x \perp y \iff y \perp x$

III $A \perp B \iff \forall x \in A : x \perp B$

Exo.

IV $A \perp B \iff \text{Vect}(A) \perp \text{Vect}(B)$

$A \perp B \iff \forall a \in A \quad a \perp B$

$\Leftrightarrow \forall a \in A \quad a \perp \text{Vect}(B)$

$\Leftrightarrow A \perp \text{Vect}(B)$

$\Leftrightarrow \text{Vect}(B) \perp A$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \text{Vect}(B) \perp \text{Vect}(A)$

$\Leftrightarrow \text{Vect}(A) \perp \text{Vect}(B)$.

V : si $A \subseteq B$

alors $a \perp B \Rightarrow a \perp A$

VI $A \perp A^\perp$:

par déf : $A \perp a \quad \forall a \in A^\perp$.

VII. $\{0\}^\perp = E \quad \forall a \quad a \perp 0$

VIII $E^\perp = \{0\}$

En effet : si $x \perp E$

alors en particulier

$x \perp a \Rightarrow x = 0$.

IX. Si $A \subseteq B$

alors $A^\perp \supseteq B^\perp$

(inversion de l'inclusion)

car : $x \perp B \Rightarrow x \perp A$

X. $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$

car : $x \perp A \Leftrightarrow x \perp \text{Vect}(A)$

Proposition : $\forall A \subseteq E$:

$A^\perp$ est un S.e.v.

de E.

Preuve : Soit $x, y \in A^{\perp}$

α scalaire.

alors : $\forall z \in A$:

$$\langle x + \alpha y, z \rangle =$$

$$\underbrace{\langle x, z \rangle}_{=0} + \bar{\alpha} \underbrace{\langle y, z \rangle}_{=0}$$

Car $x, y \in A^{\perp}$, $z \in A$

$$= 0$$

$$\Rightarrow x + \alpha y \perp z$$

Conclusion : $x + \alpha y \perp A$

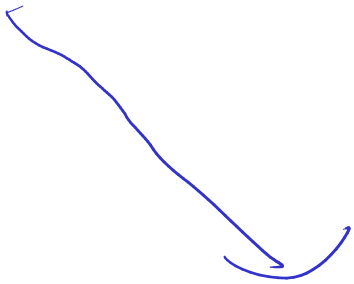
c'à d : $x + \alpha y \in A^{\perp}$

Comme $0 \in A^{\perp}$: $A^{\perp}$ est un s.e.v ∎

Désormais on suppose que

E est un esp. euclidien ou hermitien (= préhilbertien de dim finie)

En particulier E admet des bases.



Supposant que nous ayons une base orthogonale ou o.n., on fera des calculs.

On verra comment fabriquer des bases orthogonales ou o.n.

Calculs :

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille orthogonale, $v_i \neq 0$ (peut être une base).

Soit $x \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$

$$x = \sum \alpha_i v_i .$$

Déjà fait :

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum \alpha_i v_i , \sum \alpha_j v_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= \sum_i |\alpha_i|^2 \langle v_i, v_i \rangle$$

$$= \sum_i |\alpha_i|^2 \|v_i\|^2$$

"Pythagore" :

$$\|\Sigma \alpha_i v_i\| = \|x\| = \sqrt{\sum |\alpha_i|^2 \|v_i\|^2}$$

Si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est o.n. ça se simplifie :

$$\|x\| = \left\|\sum \alpha_i v_i\right\| = \sqrt{\sum |\alpha_i|^2}.$$

---

plus généralement.

si $x = \sum \alpha_i v_i$

$y = \sum \beta_i v_i$

alors : $\langle x, y \rangle =$

$$= \sum_i \overline{\alpha_i} \beta_i \|v_i\|^2$$

(si $(v_1 \dots v_n)$ est une famille

orthogonal)

et $\langle x, y \rangle = \sum \bar{\alpha}_i \beta_i$

si $(v_1 \dots v_n)$ est une famille o.n.

Autrement dit : dans une base o.n., le pr. scalaire est le pr. scalaire des coordonnées.

standard

Comment calculer les coordonnées :

On suppose que $(v_1 - v_n)$

est une famille orth. libre.

et $\boxed{x = \sum \alpha_i v_i}$

alors :

$$\langle v_i, x \rangle = \langle v_i, \sum_j \alpha_j x_j \rangle$$

$$= \sum_j \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= \alpha_i \|v_i\|^2 .$$

autrement dit :

$$\alpha_i = \frac{\langle v_i, x \rangle}{\|v_i\|^2} = \frac{\langle v_i, x \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

si la famille $(v_1 - v_n)$ est o.n. : $\|v_i\|^2 = 1$

et : $\boxed{\alpha_i = \langle v_i, x \rangle}$

Résumé : Soit $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i .$$

- Si les $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille orthogonale sans vecteur nul :

$$\langle x, y \rangle = \sum \overline{\alpha_i} \beta_i \|v_i\|^2$$

$$\alpha_i = \frac{\langle v_i, x \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

- Si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille o.n. :

$$\langle x, y \rangle = \sum \overline{\alpha_i} \beta_i$$

$$\alpha_i = \langle v_i, x \rangle$$