Rappels : E - espace préhilbertien réel ou complexe.

càd : un $\mathbb{F}$-e.v. où $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

muni d'un produit scalaire.

$x, y \in E$: $x \perp y$ si $\langle x, y \rangle = 0$.

Une famille $(v_1, \dots, v_k)$ est

I orthogonale si $\forall i \neq j$ $v_i \perp v_j$.

II orthonormée si en plus : $\|v_i\| = 1$

càd : $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$.

si $x = \sum x_i v_i$ $y = \sum y_i v_i$ $\in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$:

si $(v_1 \dots v_k)$ est orthogonale (sans vecteur nul)

$$\langle x, y \rangle = \sum_i \bar{x}_i y_i \|v_i\|^2$$

$$\|x\|^2 = \sum |x_i|^2 \|v_i\|^2$$

et en particulier :

(pythagore) : $\|v_1 + \dots + v_k\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2$.

$$x_i = \frac{\langle v_i, x \rangle}{\|v_i\|^2} = \frac{\langle v_i, x \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_i, x \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

si $(v_1 \dots v_k)$ est o.n.

$$\langle x, y \rangle = \sum \bar{x}_i y_i$$

$$\|x\|^2 = \sum |x_i|^2.$$

$$x_i = \langle v_i, x \rangle.$$

$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle v_i, x \rangle v_i.$$

Q : et si on omettait l'hypothèse que

$x \in \mathrm{Vect}(v_1 \dots v_k)$?

Autrement dit : Soit $v_1 - v_k$ une famille orth sans vec ! nul (voire o.n.).

$x \in E$.

Posons $x' = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_i, x\rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$ et $x'' = x - x'$

$x = x' + x''$.

$\to \langle v_i, x'\rangle = ?$

$\langle v_i, x''\rangle = ?$

$$\langle v_i, x'\rangle = \left\langle v_i, \sum_j \frac{\langle v_j, x\rangle}{\|v_j\|^2} v_j \right\rangle$$

$$= \sum_j \frac{\langle v_j, x\rangle}{\|v_j\|^2} \cdot \underbrace{\langle v_i, v_j\rangle}_{=0 \text{ si } i \neq j}$$

$$= \frac{\langle v_i, x\rangle}{\|v_i\|^2} \cdot \langle v_i, v_i\rangle = \langle v_i, x\rangle.$$

$\Rightarrow \langle v_i, x''\rangle = \langle v_i, x\rangle - \langle v_i, x'\rangle = 0.$

$\Rightarrow v_i \perp x'' \quad \forall\, i = 1, \dots, k.$

$\Rightarrow x'' \perp \mathrm{Vect}(v_1 - v_k)$ ie : $x'' \perp y$ $\forall\, y \in \mathrm{Vect}(v_1 - v_k)$

$\Leftrightarrow \underline{x'' \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)^\perp}$

Donc :

$x = x' + x''$, $x' \in \mathrm{Vect}(v_1 - v_k)$

$x'' \perp$ " .

Orthogonalisation / orthonormalisation de Gram-Schmidt.

$\Rightarrow$ procédé pour trouver des familles orthogonales / orthonormées.

« Défi » :

Étant donné une famille libre

$(u_1, \dots, u_m)$, trouver une

famille orthogonale ou orthonormée $(v_1, \dots, v_m)$

tq. $\forall k = 1 \dots m$:

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots v_k).$$

[Pour la théorie générale abstraite : on veut une famille o.n.

Pour certains calculs concrets : plus facile avec orthogonale].

Disons qu'on cherche $(v_1, \dots, v_m)$ orthogonale :

$v_1 = ?$ doit être colinéaire avec u_1.

autant prendre : $v_1 = u_1$.

$v_2 = ?$ Il faut que $\mathrm{Vect}(\underset{u_1}{\underset{\parallel}{v_1}}, v_2) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$

... $v_2 = u_2 + ? \cdot u_1$ tq $v_2 \perp \underset{u_1}{\underset{\parallel}{v_1}}$.

D'après le calcul précédent :

Si $v_2 = u_2 - \dfrac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1$ alors $v_2 \perp v_1$.

Formule générale :

Étant donné une famille libre $(u_1 - u_m)$

on construit $(v_1 - v_m)$ par réc :

$v_1 = u_1$

$v_2 = u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1$

famille orthogonale

$$\boxed{v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_i, u_{k+1} \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i}$$

$\Rightarrow v_{k+1} \perp Vect(v_1 \dots v_k)$

et $Vect(v_1 \dots v_{k+1})$
$= Vect(v_1 - v_k, u_{k+1})$

la famille $(v_1 - v_m)$ est orthogonale

$\Rightarrow$ par réc : $Vect(v_1 - v_k) = Vect(u_1 - u_k)$
$\forall k = 1, \dots, m.$ ✓

Rmq $v_i \neq 0 \quad \forall i$ car : si $v_{k+1} = 0 \Rightarrow$
$u_{k+1} \in Vect(v_1 - v_k)$
$= Vect(u_1 - u_k)$

or : on a supposé que la famille est libre.

Si on ne sait pas à l'avance que $u_1 - u_k$ est libre ; on peut avoir des $v_i = 0$, on les « jette à la poubelle ».

Si on veut une famille o.n. :

Possibilité 1. On trouve une famille orthogonale $v_1 \cdots v_m$ comme plus haut, puis on pose

$e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$ $\Rightarrow$ $\langle e_i, e_j \rangle = \langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \rangle$

$$= \frac{\langle v_i, v_j \rangle}{\|v_i\| \, \|v_j\|} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{\|v_i\|^2}{\|v_i\|^2} = 1 & i = j \end{cases}$$

donc : $(e_1 \cdots e_m)$ est bien une famille o.n..

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{On trouve une famille orthog., puis on la normalise.}}$

Possibilité 2 : On "intègre la normalisation dans le procédé." : dès qu'on a trouvé v_i on pose $e_i := \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

$v_1 = u_1$ $\qquad e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

$v_2 = u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 = u_2 - \langle e_1, u_2 \rangle \cdot e_1$ $\qquad e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$

$\vdots$

famille o.n.

$$\boxed{v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle e_i, u_{k+1} \rangle \cdot e_i \qquad e_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}}$$

Formules plus simples Mais : Fait apparaître des racines carrées, plus moche à calculer.

Théorème (que nos calculs ont déjà démontré)

En appliquant ce procédé à une famille libre $(u_1, \dots, u_m)$ on obtient une famille orthogonale sans vect. nul $(v_1 - v_m)$

et une famille o.n. $(e_1 - e_m)$

t.q. $\forall k = 1 - m$: $\mathrm{Vect}(u_1 - u_k) = \mathrm{Vect}(v_1 - v_k)$
$= \mathrm{Vect}(e_1 - e_k)$.

(En particulier : $\mathrm{Vect}(u_1 - u_m) = \mathrm{Vect}(v_1 - v_m)$
$= \mathrm{Vect}(e_1 - e_m)$.)

Rappel. Un <u>espace euclidien</u> est un espace préh. réel de dim finie.

Un <u>espace hermitien</u> est un espace préh. complexe de dim finie.

<u>Corollaire</u> Tout espace E euclidien ou hermitien admet une base o.n. (donc en particulier orthogonale)

<u>Preuve</u> : on prend n'importe quelle base $(u_1 - u_n)$ (où $n = \dim E$) et on applique Gram-Schmidt pour trouver une famille o.n. $(e_1 - e_n)$ t.q.

$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) = E$.

Exercice type : trouver des base o.n. à des espaces (le plus souvent euclidiens...)

Rappel ! si $A \subseteq E$: $A^\perp = \{x \in E \; ; \; x \perp A\}$
$\Updownarrow$
$x \perp y \; \forall y \in A$.

- $A^\perp$ est tj un s.e.v. de E.
- $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.

Le plus souvent on parlera de $F^\perp$ lorsque F est un s.e.v.

Lemme : $F \cap F^\perp = \{0\}$ pour tout s.e.v. F.

preuve : En effet : $0 \in F \cap F^\perp$ car $F, F^\perp$ sont des s.e.v.

Si $x \in F \cap F^\perp$: $\underbrace{x \in F \quad \text{et} \quad x \perp F}$

$\Rightarrow x \perp x$

$\Rightarrow x = 0$ $\quad \left(\underset{= \|x\|^2}{\langle x, x\rangle} = 0.\right)$

Soit F encore un s.e.v. d'un espace euclidien ou hermitien E.
que puis-je dire de $\dim F$, $\dim F^\perp$?

Soit $n = \dim E$, $k = \dim F \leq n$.

Soit $u_1 \dots u_k$ une base pour F.

Complétons-la en une base pour E :

$$u_1 \dots u_k, \underbrace{u_{k+1}, \dots u_n}_{\text{on ne sait pas gd chose de ces vecteurs}}.$$

Appliquons Gram-Schmidt

$\rightsquigarrow v_1 \dots v_k, v_{k+1} \dots v_n$

I orthogonale

II. $\mathrm{Vect}(v_1 \dots v_k) = \mathrm{Vect}(u_1 \dots u_k) = F$.

III $\mathrm{Vect}(v_1 \dots v_n) = \mathrm{Vect}(u_1 \dots u_n) = E$.

$\Longrightarrow$ $v_1 \dots v_k$ est une base orthogonale pour F

($v_1 \dots v_n$ est une base orth. pour E)

et :

$\forall i = k+1, \dots, n$: $v_i \perp v_1, v_2, \dots, v_k$

$\Rightarrow v_i \perp F \iff v_i \in F^\perp$.

donc $v_{k+1}, \dots, v_n$ est une famille libre dans $F^\perp$ $\Rightarrow \dim F^\perp \geq n-k$

On a : $\dim F = k$ $\dim F^\perp \geq n-k$

$\Rightarrow \dim F + \dim F^\perp \geq n = \dim E$.

or $F \cap F^\perp = \{0\}$.

ce n'est possible que si

$\dim F^\perp = n-k$ et $E = F \oplus F^\perp$.

On a démontré :

Corollaire : Soit E euclidien ou hermitien et F un s.e.v. alors $E = F \oplus F^\perp$.

De surcroît, si $u_1 - u_k$ est une base de F et $(u_1 - u_n)$ est une base de E et on applique G-S pour obtenir une base orthogonale $(v_1 - v_n)$ pour E :

$(v_1 - v_k)$ est une base $\underset{\text{orthog.}}{}$ pour F

et $(v_{k+1} - v_n)$ est une base $\underset{\text{orthog.}}{}$ pour $F^\perp$

$F^\perp$ s'appelle le supplémentaire orthogonal de F.

Corollaire : Soit E euclidien ou hermitien, $F, G \subseteq E$ des s.e.v.

alors I. $(F^\perp)^\perp = F$.

et II $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

III $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Preuve: I. par déf. de $F^\perp$: $F \perp F^\perp$

$\Rightarrow F \subseteq (F^\perp)^\perp$.

or si $\dim E = n$, $\dim F = k$

alors $\dim F^\perp = n-k$

$\Rightarrow \dim (F^\perp)^\perp = n-(n-k) = k$

$= \dim F$

comme $F \subseteq (F^\perp)^\perp$: $F = (F^\perp)^\perp$.

II. si $x \in (F+G)^\perp$: $x \perp F+G$

$\Rightarrow x \perp F$ et $x \perp G$

$\Rightarrow x \in F^\perp \cap G^\perp$.

et si $x \in F^\perp \cap G^\perp$:

$\Rightarrow x \perp F$ et $x \perp G$

$\Rightarrow x \perp F \cup G \Rightarrow x \perp \underbrace{\mathrm{Vect}(F\cup G)}_{F+G}$ a

$\Rightarrow x \in (F+G)^\perp$.

pas besoin de Gram-Schmidt !

III. $(F\cap G)^\perp \overset{\mathrm{I}}{=} \left((F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp\right)^\perp \overset{\mathrm{II}}{=} \left(\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp\right)^\perp$

$F = (F^\perp)^\perp$

$G = --$

$(F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp = (F^\perp + G^\perp)^\perp$

$\overset{\mathrm{I}}{=} F^\perp + G^\perp$.

<u>Rmq</u> - De la même manière on aurait pu démontrer $\overline{II}$ à partir de $\overline{III}$ et $\overline{I}$

(pour moi : les identités $\overline{II}$ et $\overline{III}$ sont "duales".)