Rappels : Si E est un espace euclidien ou hermitien (= préhilb. de dim finie)

$F \subseteq E$ s.e.v

$F^\perp = \{x \in E : x \perp F\} = \{x \in E : x \perp y \ \forall y \in F\}$ est le supplémentaire orthogonal de F

alors : $E = F \oplus F^\perp$

($E = F \oplus G$ où F, G sont des s.e.v.

si : $\forall x \in E \quad \exists ! \ x_F \in F, \ x_G \in G$

tq $x = x_F + x_G$.)

Rmq si E est préhilbertien quelconque, on a toujours

$F \cap F^\perp = \{0\} \Longrightarrow$ si $x \in E$ s'écrit

comme $x_F + x_{F^\perp}$ alors cette décomposition

$\quad\ \ \in F \quad \in F^\perp$

est unique. Si de surcroît $E = F + F^\perp$

alors $E = F \oplus F^\perp$.

Lorsque E est de dim infini il se peut que

$E \neq F + F^\perp$ ......

Rappel 2 : Soit E préhilbertien

Si $(u_1 - u_n)$ est une famille orth sans

vect nul et $F = Vect(u_1, \dots u_n)$

(autrement dit : si c'est une base orth. de F).

et si $x \in E$.

on pose $x_F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u_i, x_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$.

et $x_{F^\perp} = x - x_F$

alors : $x_F \in F$ ✓ $x_F + x_{F^\perp} = x$ ✓

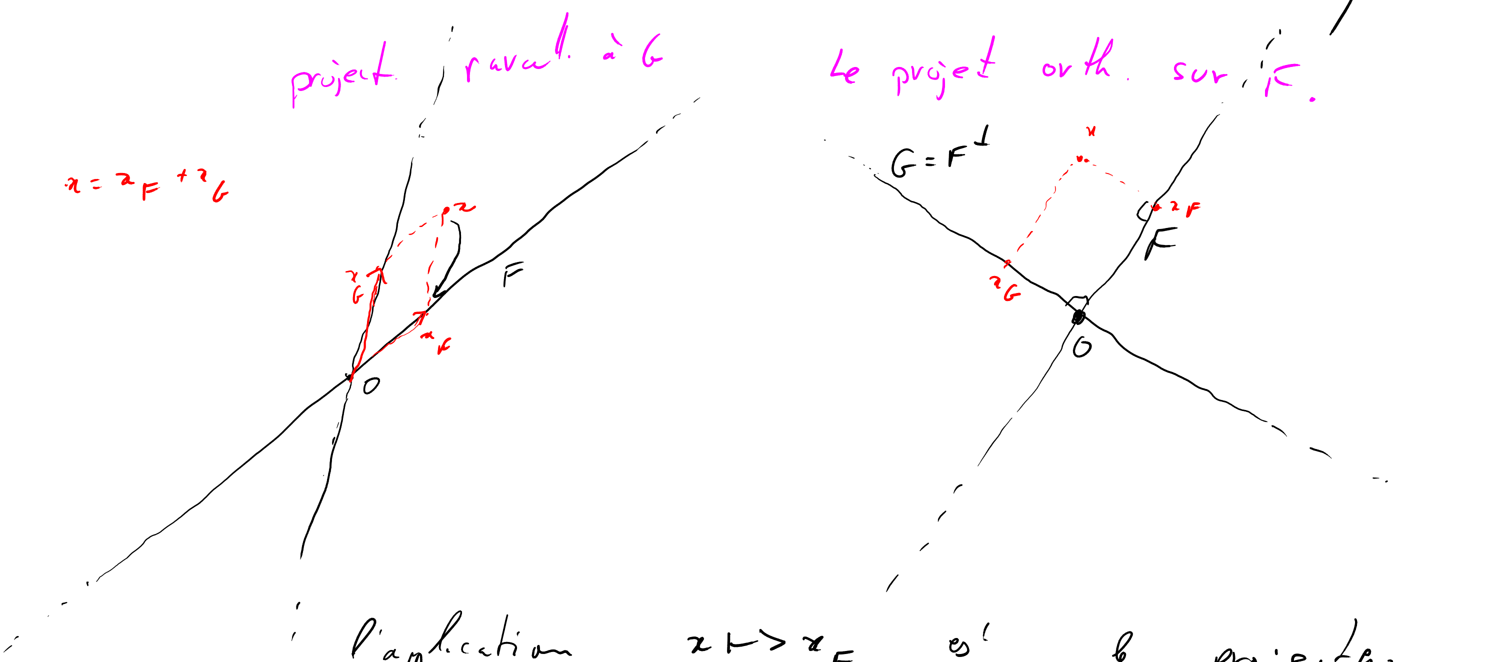
et $x_{F^\perp} \perp u_i \ \forall i \Rightarrow x_{F^\perp} \perp F \Rightarrow x_{F^\perp} \in F^\perp$

Corollaire de cela : Si E est préhilbertien où $F \subseteq E$ est un s.e.v. de dim finie. alors :
$$E = F \oplus F^\perp$$

Preuve : F est préhil de dim finie $\Rightarrow$ admet une base orthog. par Gram-Schmidt $\Rightarrow$ on peut faire le calcul de x_F, $x_{F^\perp}$ comme plus haut.
$\forall x \in E \ \exists! \ x_F \in F, \ x_{F^\perp} \in F^\perp$ tq $x = x_F + x_{F^\perp}$.

Projection orthogonale

Provisoirement soit E un e.v quelconque, $F, G \subseteq E$ s.e.v. tq. $E = F \oplus G$.
$\forall x \in E$: $x = \underset{F}{\overset{\in}{x_F}} + \underset{G}{\overset{\in}{x_G}}$ d'une manière unique.



l'application $x \mapsto x_F$ est le projecteur sur F parallèlement à G

On dirait que dans le 2^e dessin, x_F est le point de F le plus proche de x.

Définition Soit E un espace préhilbertien et soit $F \subseteq E$ un s.e.v de E t.q. $E = F \oplus F^\perp$ (vrai si : E euclidien ou E hermitien ou E préhilbertien et F de dim finie)

le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$ s'appelle le projecteur orthogonal sur F.

Un projecteur est tjrs une application lin

En effet : si $E = F \oplus G$

$x = x_F + x_G$

$y = y_F + y_G$, α scalaire :

$$x + \alpha y = \underbrace{(x_F + \alpha y_F)}_{\in F} + \underbrace{(x_G + \alpha y_G)}_{\in G}$$

proj. sur F
$\downarrow$ parall à G

$$P(x + \alpha y) = x_F + \alpha y_F = P(x) + \alpha P(y) \checkmark.$$

Propriétés du proj. orth. (lorsqu'il existe) :

On le notera par P_F.

Si $x \in E$: $x = x_F + x_{F^\perp}$

$$\overset{\shortparallel}{P_F(x)} + (x - P_F(x)).$$

<u>Donc</u> : $x - P_F(x) \in F^\perp$

$x - P_F(x) \perp F$.

On peut échanger les rôles de F et $F^\perp$:

$$x = \underbrace{x - P_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{P_F(x)}_{\in F \subseteq (F^\perp)^\perp}$$

$\Rightarrow$ le projet. orth sur $F^\perp$ existe aussi :

$P_{F^\perp}(x) = x - P_F(x)$ $\forall \in E$.

$$\boxed{P_{F^\perp} = Id - P_F} \quad \text{ou :} \quad \boxed{P_F + P_{F^\perp} = Id}$$

En particulier : si $x \in (F^\perp)^\perp$ alors

$$x = P_F(x) + P_{F^\perp}(x) = \underbrace{P_{F^\perp}(x)}_{=0} + P_{(F^\perp)^\perp}(x).$$

$\Leftrightarrow$ $x = P_F(x)$ $\Rightarrow x \in F$.

$\Rightarrow (F^\perp)^\perp \subseteq F$

Conclusion : si $E = F \oplus F^\perp$ alors $F = (F^\perp)^\perp$

<u>2 propriétés</u> : I. $P_F(x) = x \Leftrightarrow x \in F$.

<u>II</u> $P_F(x) = 0 \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \in F^\perp$

<u>Preuve</u>. I. Si $x = P_F(x)$: $x \in F$ car $P_F(x) \in F$.

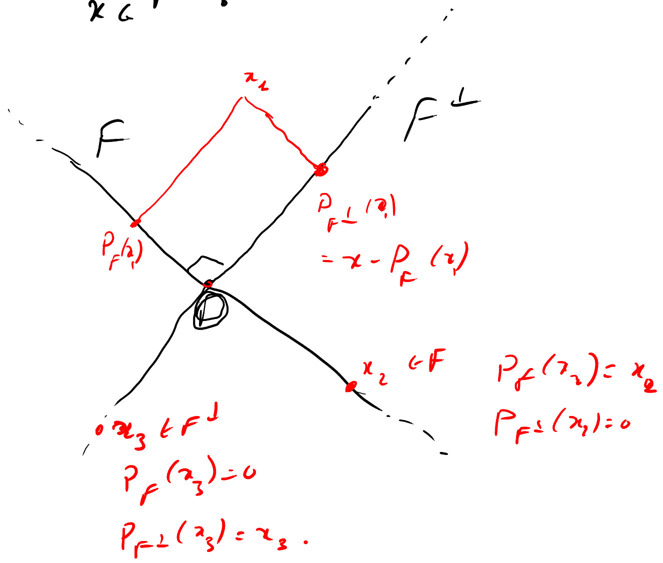
Si $x \in F$: $x = \underset{\in F}{x} + \underset{\in F^\perp}{0} \Rightarrow P_F(x) = x$.

II. Si : $x \in F^\perp$: $x = \underset{\in F}{0} + \underset{\in F^\perp}{x} \Rightarrow P_F(x) = 0$

Si : $P_F(x) = 0$: $x = \underbrace{P_F(x)}_{=0} + P_{F^\perp}(x) \Rightarrow \underbrace{P_{F^\perp}(x)}_{\in F^\perp} = x$

d'où : $x \in F^\perp$.

Retour au dessin :



Proposition Soit E préhilbertien et $F \subseteq E$ s.e.v. tq $E = F \oplus F^\perp$. Soit $x \in E$, $y \in F$.

alors : $y = P_F(x)$ ssi $\forall z \in F : \langle z, y\rangle = \langle z, x\rangle$.

Preuve : $y = P_F(x) \iff x - y \in F^\perp \iff x - y \perp F$

$\iff \forall z \in F \quad \langle z, y - x\rangle = 0$

$\iff \forall z \in F \quad \langle z, y\rangle = \langle z, x\rangle$. ∎

Lemme : Mêmes hypothèses sur E et F :

$P_F \circ P_F = P_F$ (P_F est "idempotent")

$P_F \circ P_{F^\perp} = P_{F^\perp} \circ P_F = 0$. (application nulle !)

Preuve : Soit $x \in E$. $P_F(x) \in F \Rightarrow P_F(P_F(x)) = P_F(x)$

et $P_{F^\perp}(x) \in F^\perp \Rightarrow P_F(P_{F^\perp}(x)) = 0$, $P_{F^\perp}(P_F(x)) = 0$ | on utilise les 2 propriétés de tout à l'heure. ∎

Calcul de P_F lorsque F est de dim finie :

3 étapes : I. trouver une base $(u_1, \dots, u_k)$ de F. (dépend de la manière dont F est donné).

II. trouver une base orthogonale (ou o.n) pour. On applique G–S à $(u_1, \dots, u_k)$.

III. Soit $(v_1, \dots, v_k)$ la base orthog. obtenue et $x \in E$.

$$P_F(x) = x_F = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_i, x\rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$$

(ou, si c'est une base o.n. $\sum_{i=1}^{k} \langle v_i, x\rangle \cdot v_i$)

En effet : Dans ce cas : on a vu que

$x - x_F \in F^\perp$: donc $x = \underbrace{x_F}_{P_F(x)} + \underbrace{(x - x_F)}_{P_{F^\perp}(x)}$

__Rmq__

Si $E = F \oplus F^\perp$ et $F^\perp$ est de dim finie alors on sait calculer $P_{F^\perp}$ directement. On peut calculer P_F par :

$$\boxed{P_F(x) = x - P_{F^\perp}(x).}$$

$$\boxed{P_F + P_{F^\perp} = Id}$$

Parfois il est plus facile de calculer $P_{F^\perp}$ directement

Par exemple : $E = \mathbb{R}^3$. $F \subseteq E$ $\dim F = 2$

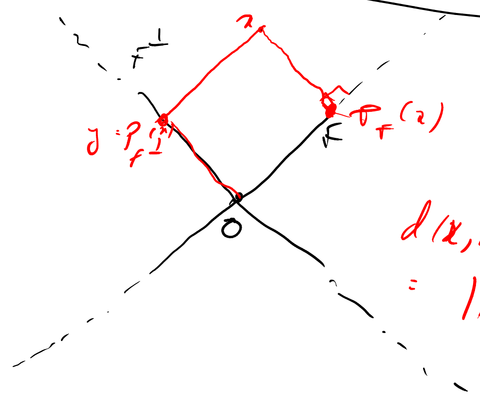
alors $\dim F^\perp = 1$ $\quad$ $(3 = 2+1$
$\dim E = \dim F + \dim F^\perp)$

plus facile d'appliquer la méthode de calcul à $P_{F^\perp}$ qu'à P_F.

Si $(u_1 \dots u_k)$ est une base de F alors:

$$\boxed{F^\perp = \{u_1 \dots u_k\}^\perp = \{x \in E : \langle u_1, x\rangle = \dots = \langle u_k, x\rangle = 0\}}$$

$F^\perp$ est l'espace de solutions de k équations.



$P_F(x)$ est-il le pt de F le plus proche de x?

$d(x, F) = \|P_{F^\perp}(x)\| = \|y\|$

Déf: la distance entre deux vecteurs x, y est:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Si $A \subseteq E$: la distance de x à A est:

$$d(x, A) = \inf \{d(x,y) : y \in A\}$$

Théorème: Soit E préhilbertien, $F \subseteq E$ un s.e.v t.q $E = F \oplus F^\perp$

soit $x \in E$.

alors $P_F(x) \in F$ est le vecteur de F le plus proche de x et :

$$d(x, F) = d(x, P_F(x)) = \| \underbrace{x - P_F(x)}_{= P_{F^\perp}(x)} \| = \| P_{F^\perp}(x) \|$$

Preuve : Pour montrer que $x_F = P_F(x)$ est le pt de F le plus proche à x : on prend n'importe quel $y \in F \setminus \{x_F\}$ et on montre que : $\underset{\| x-y \|}{d(x, y)} > \underset{\| x - x_F \|}{d(x, x_F)}$.

On va calculer.

$$\| x-y \|^2 = \| \underbrace{x - x_F}_{= P_{F^\perp}(x) \in F^\perp} + \underbrace{x_F - y}_{\in F} \|^2 = \ldots$$

Or : $x - x_F \in F^\perp$, $x_F - y \in F \Rightarrow x - x_F \perp x_F - y$

$$\ldots = \| x - x_F \|^2 + \| x_F - y \|^2 \quad \Big(+ 2 \underbrace{\mathrm{Re} \langle x - x_F, x_F - y \rangle}_{= 0} \Big)$$

or : $x_F \neq y \Rightarrow \| x_F - y \|^2 > 0$

conclusion : $\| x - y \|^2 = \| x - x_F \|^2 + \| x_F - y \|^2 > \| x - x_F \|^2$

$$\Rightarrow \| x - y \| > \| x - x_F \|.$$

On a bien démontré que $x_F = P_F(x)$ est le pt de F le plus proche de x.

Donc : $d(x, F) = \inf \{ d(x, y) ; y \in F \}$

(minimum atteint) $= d(x, P_F(x)) = \| P_{F^\perp}(x) \|$.

Pause $\Rightarrow$ 11h35.

Calcul du produit scalaire dans une base quelconque, la matrice associée au pr. sc. dans une base

Contexte E = esp. euclidien ou hermitien
(= esp. préh. de dim finie)
c'est $\mathbb{F}$-e.v. où $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (euclidien)
ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (hermitien).

$\dim E = n$

Soit $(e_1 \dots e_n)$ une base.
La matrice associée au pr. scalaire dans cette base est :

$$M_{(e_1 \dots e_n)} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle & \cdots & \langle e_1, e_n\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle e_n, e_1\rangle & & \cdots & \langle e_n, e_n\rangle \end{pmatrix}$$

$$= (m_{ij}) \quad \text{où} \quad m_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle.$$

si $x = \sum x_i e_i \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$y = \sum y_i e_i \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ alors :

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i , \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \overline{x_i}\, y_j \langle e_i, e_j\rangle$$

$$= {}^t\overline{X} M_{(e_1 \dots e_n)} Y = (\overline{x_1} \dots \overline{x_n}) \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \langle e_i, e_j\rangle & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\langle x, y\rangle = {}^t\overline{X} M_{(e_1 \dots e_n)} Y.}$$

Cas réel : $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\overline{X} = X$

et $\langle x, y \rangle = {}^tX \, M_{(e_1 - e_n)} Y$.

Changement de base :

Si $(f_1 - f_n)$ est une autre base

et P est la matrice de passage

$(e_1 - e_n) \to (f_1 - f_n)$, alors : $X = PX'$, $Y = PY'$

où X', Y' sont les vect. coord. de x, y

dans $(f_1 - f_n)$.

Posons $M = M_{(e_1 - e_n)}$ $M' = M_{(f_1 - f_n)}$

alors : ${}^t\overline{X} M Y = \langle x, y \rangle = {}^t\overline{X'} M' Y'$

$$\overset{\shortparallel}{{}^t\overline{(PX')}} M P Y' = {}^t\overline{X'} \, {}^t\overline{P} M P Y'.$$

Ceci est vrai $\forall x, y$ donc $\forall X', Y'$

d'où : ${}^t\overline{P} M P = M'$.

Formule de chgt de base :

$$\boxed{\begin{array}{l} M_{(f_1 - f_n)} = {}^t\overline{P} \, M_{(e_1 - e_n)} P \quad \text{où} \\ P \text{ est la mat. de passage} \\ (e_1 - e_n) \mapsto (f_1 - f_n). \end{array}}$$

Cas particuliers : | $\underline{I_0}$ $(e_1 - e_n)$ est orthogonale

ssi : $M_{(e_1 - e_n)}$ est diagonale.

En effet les deux conditions sont équivalentes à

$$\forall i \neq j : \langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad (e_i \perp e_j)$$

II. $(e_1 - e_n)$ est o.n. ssi

$$M_{(e_1 - e_n)} = I_n .$$

En effet les deux conditions sont équivalentes à : $\forall i, j = 1, \ldots, n$: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$.

Si $(e_1 - e_n)$ et $(f_1 - f_n)$ sont deux bases o.n. avec matrice de passage P alors :

$$\underset{= I_n}{M_{(f_1 - f_n)}} = {}^t\bar{P} \underbrace{M_{(e_1 - e_n)}}_{= I_n} P = {}^t\bar{P}P .$$

c'à'd : ${}^t\bar{P} = P^{-1}$.

Déf : I. Une matrice carrée (au dessus de n'importe quel corps) O

est <u>orthogonale</u> si : $O^{-1} = {}^tO$.

bc plus facile à vérifier que de calculer O^{-1} ... !

$$\boxed{\left(\iff {}^tO\,O = I_n \iff O\,{}^tO = I_n \right)}$$

II. Une matrice carrée à coordonnée complexe $U \in Mat_{n \times n}(\mathbb{C})$ est <u>unitaire</u> si

$$U^{-1} = {}^t\bar{U}$$

même remarque $\left(\iff U\,{}^t\bar{U} = I_n \iff {}^t\bar{U}U = I_n \right)$

En particulier : si $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$: $\bar{A} = A$
$\in Mat_{n \times n}(\mathbb{C})$

donc A est orthogonale ssi A est unitaire.

Nous avons démontré :

Prop La matrice de passage entre deux bases o.n. est unitaire (dans le cas réel : orthogonale).

Prop (Réciproque) : Soit $(e_1 \ldots e_n)$ une base o.n. et P la matrice de passage vers $(f_1 \ldots f_n)$
si P est unitaire (ou, ds le cas réel, orthogonal) alors $(f_1 \ldots f_n)$ est o.n. également.

Preuve : avec ces hypothèses :
$M_{(e_1 \ldots e_n)} = I_n$

Donc $M_{(f_1 \ldots f_n)} = {}^t\bar{P}\, I_n \cdot P = {}^t\bar{P}P = I_n$.

donc $(f_1 \ldots f_n)$ est une base on. ■

Morale Passage entre 2 bases o.n :
cas réel : matrice orthogonale [= unitaire]
cas complexe : matrice unitaire

Endomorphismes d'un espace euclidien ou hermitien.

Contexte : E = espace euclidien $(\mathbb{F} = \mathbb{R})$ ou hermitien $(\mathbb{F} = \mathbb{C})$.
de dim n.

Déf Un endomorphisme de E est une application linéaire $f : E \to E$.

L'espace de tous les endomorphismes de E sera noté $End(E)$. C'est un $\mathbb{F}$-e.v.

si $f, g \in End(E), \alpha \in \mathbb{F}$ alors $f + \alpha g \in End(E)$

où : $(f + \alpha g)(x) = f(x) + \alpha g(x)$.

[à vérifier (ou rappeler) : ça rend $End(E)$ un $\mathbb{F}$-e.v.]

$\dim End(E) = n^2$: on fixe une base $(e_1 - e_n)$ pour E et ça nous donne un isomorphisme

$$End(E) \xrightarrow{\sim} Mat_{n \times n}(\mathbb{F})$$

$$f \longmapsto \underset{(e_1 - e_n)}{Mat}(f).$$

Soit $(e_1 - e_n)$ une base o.n.

Soit $f \in End(E)$ et soit $A = (a_{ij})$ sa matrice : $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$

Comme $(e_1 - e_n)$ est o.n. :

$$\Rightarrow a_{ij} = \langle e_i, f(e_j) \rangle$$

$\therefore$ La matrice de f dans une base o.n. $(e_1 - e_n)$ est :

$$\begin{pmatrix} \langle e_1, f(e_1) \rangle & \cdots & \langle e_1, f(e_n) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_n, f(e_1) \rangle & \cdots & \langle e_n, f(e_n) \rangle \end{pmatrix} = (\langle e_i, f(e_j) \rangle)$$

<u>Déf</u> Soit $f \in End(E)$.

<u>L'adjoint de f</u> est l'unique (on verra l'unicité tout de suite)

endomorphisme $f^* \in End(E)$ qui vérifie :

$\forall x, y$: $\langle x, f(y)\rangle = \langle f^*(x), y\rangle$,

(on verra aussi que f^* existe).

Il faut mq $\forall f \in End(E)$: L'endomorphisme adjoint f^* existe, et est unique.

On fixe une base o.n. $(e_1, \ldots, e_n)$ (on peut : par G-S)

On va étudier les matrices M_f et M_{f^*} dans cette base

<u>Rmq</u>: pour avoir $\langle x, f(y)\rangle = \langle f^*(x), y\rangle \quad \forall x, y$

il suffit d'avoir $\boxed{\langle e_i, f(e_j)\rangle = \langle f^*(e_i), e_j\rangle \quad \forall i,j=1,\ldots,n}$

En effet, dans ce cas, si $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_j e_j$:

$$\langle x, f(y)\rangle = \sum_{i,j} \overline{x_i}\, y_j \,\langle e_i, f(e_j)\rangle$$

$$= \sum_{i,j} \overline{x_i}\, y_j \,\langle f^*(e_i), e_j\rangle = \langle f^*(x), y\rangle.$$

Je veux montrer que $\forall f \in End(E)\ \exists!\, g \in End(E)$

tq $\forall i,j$ $\langle e_i, f(e_j)\rangle = \langle g(e_i), e_j\rangle$. (*)

Une fois qu'on l'aura démontré on aura : $g = f^*$.

Soit M_f = mat. de f dans la base $(e_1 - e_n)$
$= (a_{ij})$.

D'après notre calcul : $a_{ij} = \langle e_i, f(e_j)\rangle$

Soit $g \in End(E)$ et
$M_g = (b_{ij})$

alors : $\langle g(e_i), e_j\rangle = \overline{\langle e_j, g(e_i)\rangle} = \overline{b_{ji}}$

Donc (*) $\Leftrightarrow \forall i,j \quad a_{ij} = \overline{b_{ji}}$

$\Leftrightarrow M_f = {}^t\overline{M_g} \Leftrightarrow M_g = {}^t\overline{M_f}$

Conclusion : Il existe un unique endomorphisme vérifiant (*) et sa matrice est ${}^t\overline{M_f}$.

Autrement dit : $\forall f \in End(E)$, son endomorphisme adjoint f^* existe, est unique, et sa matrice est donnée par :

$$\boxed{M_{f^*} = {}^t\overline{M_f} \quad \text{dans une base o.n (peu importe laquelle)}}$$

$\Updownarrow$

$\forall x,y \quad \langle f^*(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ (définition de l'adjoint f^*)

Dans le cas réel :

$$M_{f^*} = {}^t M_f \qquad \left(\text{car } \overline{M_f} = M_f \text{ pour } M_f \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})\right)$$

<u>à quoi cela sert-il</u> ?

Nous verrons que l'opération $M \longmapsto {}^t\overline{M}$

($\text{ou } M \longmapsto {}^tM \text{ si } \mathbb{F} = \mathbb{R}$)

Pareil pour $f \longmapsto f^*$

est analogue à la conjugaison complexe.

Propriétés de ces opérations :

	Matrices	Endomorphisme
	${}^t(\overline{A+\alpha B}) = {}^t\overline{A} + \overline{\alpha}\,{}^t\overline{B}$	$(f+\alpha g)^* = f^* + \overline{\alpha} g^*$
	${}^t\overline{AB} = {}^t\overline{B}\,{}^t\overline{A}$	$(fg)^* = g^* f^*$
	${}^t\overline{({}^t\overline{A})} = A$	$(f^*)^* = f.$
si A / f sont inversibles :	$({}^t\overline{A})^{-1} = {}^t\overline{A^{-1}}$	$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*.$

$$\left[{}^t\overline{A} \cdot {}^t\overline{A^{-1}} = {}^t\overline{A^{-1}A} = I.\right]$$

Pour les matrices : facile

Pour les endom : découle des propriétés des matrices

$+$ la formule $M_{f^*} = {}^t\overline{M_f}$.

Propriétés de $z \in \mathbb{C}$ qui s'expriment en termes de $z, \bar{z}$	propriété analogue pour matrice complexes	réelles	pour endomorphismes
$\lvert z\rvert = 1 \Leftrightarrow \bar{z}z = 1$	${}^t\bar{A}A = I$ A unitaire	${}^tAA = I$ A orthog.	$f^*f = id$
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$	$A = {}^t\bar{A}$ hermitienne	$A = {}^tA$ symétrique	$f = f^*$ f est auto adjoint.

Nous allons montrer que d'une manière, les matrices complexe hermitienne, les matrices réelle symétrique et les endom. auto-adj. sont "analogues" aux nombres réels.

Notamment : Toutes leur valeurs propres sont réelles.