Endomorphismes orthogonaux en petite dimension (suite) : dimension 3.

E - espace euclidien dim 3.

$\mathcal{O}(E) = ?$

$= \{ f \in End(E) : f^{-1} = f^* \}$.

$$\boxed{\ldots\ldots \mathcal{O}(3) = \{ A \in M_3(\mathbb{R}) : A^{-1} = {}^tA \} = \mathcal{O}(\mathbb{R}^3).}$$

Rappel de la semaine dernière :

Soit $f \in End(E)$ orthogonal.

1. $\det f = \pm 1$. (rien à voir avec la dim).
2. f admet au moins UNE val pr réelle (car 3 est impair) avec vect. pr. v.
3. Toute val. pr est ± 1.

On verra que $\det f$ est une val pr. !

Pour l'instant : Soit λ une val. pr de f.

Donc : $\lambda = \pm 1$.

Soit $v \neq 0$ le vect. pr. corresp. : $f(v) = \lambda v$.

On remplace v par $\frac{v}{\|v\|}$: OPS que $\|v\| = 1$.

On pose : $G = v^\perp$. $\dim G = \dim E - \dim Vect(v) = 3 - 1 = 2$.

on veut MQ G est stable par f :

$x \in G \iff \langle x, v \rangle = 0 \implies f(x) \perp f(v) \implies f(x) \perp v$

car f est orthog $\langle f(x), f(v) \rangle$ $\quad f(v) = \lambda v = \pm v$ $\implies f(x) \in G$.

$\therefore x \in G \implies f(x) \in G$.

Posons $h = f|_G \in \mathcal{E}_{\ell}(G)$

et $\forall x \in G$: $\|h(x)\| = \|f(x)\| = \|x\|$

D'où : h est orthog.

$\dim G = 2 \Rightarrow$ l'analyse de la dim 2 s'applique : h est une rotation ($\Leftrightarrow \det h = 1$) ou une réflexion ($\Leftrightarrow \det h = -1$).

1er cas (que nous pourrons éviter) :

$\det h = -1$, h est une réflexion.

$\Rightarrow G$ admet une base o.n. e_1, e_2 tq.

$\mathrm{Mat}_{e_1,e_2} h = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ (c'est la réfl. par rapport à $\mathrm{Vect}(e_1)$)

<u>Donc</u> : I. 1 et -1 sont des vl. pr. de h.

donc aussi de f.

II $\mathrm{Mat}_{e_1,e_2,v}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det f = -\lambda$,

Par I on peut re-choisir λ tq. $\lambda = \det f$.

(et re-choisir v...)

par II : ce choix exclut la possibilité que h soit une réfl.

Autrement dit : on peut tjs choisir λ de sorte que h soit une rotation.

2e cas : h est une rotation.

Soit (e_1, e_2) une base o.n. de $G = v^\perp$

$\Rightarrow$ $(e_1, e_2, \underset{\overset{\shortparallel}{e_3}}{v})$ est une base o.n. de E

et $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)} f = \left(\begin{array}{c|c} R_\theta & \\ \hline & \lambda \end{array}\right)$

où $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{e_1,e_2} f_h$.

aussi : $\det f = \det R_\theta \cdot \lambda = \lambda$.

Conclusion : Pour tout $f \in \mathcal{End}(E)$:

1. $\lambda = \det f$ $(= \pm 1)$ est une val. pr. de f.

2. Soit v un vect. pr. correspn. et $e_3 = \frac{v}{\|v\|}$.

soit $G = e_3^\perp$, et soit e_1, e_2 une base o.n. de G.

alors : G est stable par f,

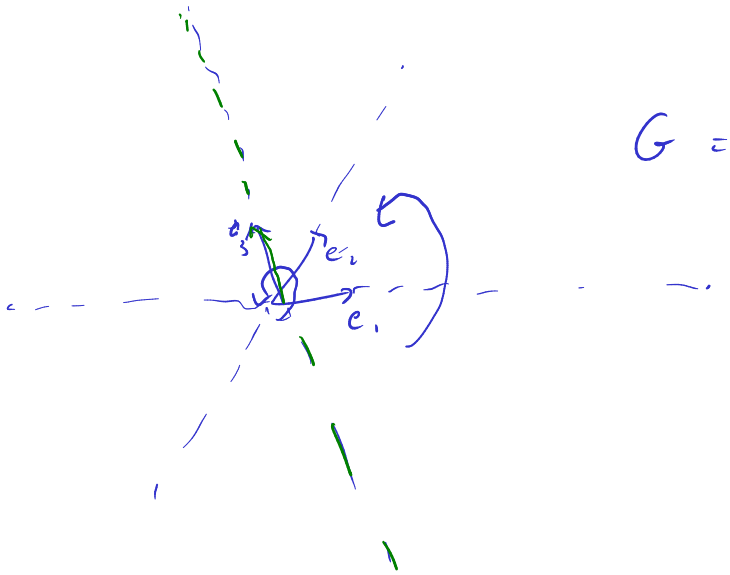
f agit sur G par rotation.

(e_1, e_2, e_3) est une base o.n. de E.

$\mathrm{Mat}_{e_1,e_2,e_3} f = \begin{pmatrix} R_\theta & \\ & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda = \pm 1$.

2 possibilités : I. $\lambda = \det f = 1$.

$\mathrm{Mat}_{e_1,e_2,e_3} f = \begin{pmatrix} R_\theta & \\ & 1 \end{pmatrix}$



$G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$

f agit en $\boxed{\text{rotation}}$ de E autour de l'axe $\boxed{G^\perp = \mathrm{Vect}(e_3)}$.

2e possibilité : $\det f = -1$:

$$\mathrm{Mat}_{e_1,e_2,e_3}(f) = \begin{pmatrix} R_\theta & & \\ & & \\ & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\theta & \\ & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_\theta & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ f est la composition d'une rotation autour de l'axe $G^\perp = \mathrm{Vect}(e_3)$ avec une réfl. par rapport au plan G.

On dit que f est une $\boxed{\text{rotation-réflexion}}$

<u>Résumé</u> : en dim 3 : $f \in \mathcal{E}nd(E)$ orthog est :

Si $\det f = 1$: une <u>rotation</u> autour d'un axe.

Si $\det f = -1$: <u>rotation-réflexion</u>, càd une rotation autour d'un axe composée avec une réflexion p.r. au plan orthog. à l'axe.

<u>Concrètement :</u> lorsque $E = \mathbb{R}^3$ (+ pr. sc. standard)

$A = \mathrm{Mat}\, f$ dans la base canonique,

① f est orth. $\iff$ A orth.

$\iff {}^tA = A^{-1} \iff {}^tA A = I_3$.

② $\det A = \pm 1$ $\nearrow$ 1 – A est une rotation.
$\searrow$ -1 – A est une rot. réfl.

soit $\lambda = \det A$. On trouve $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

tq. $Au = \lambda u$, on pose $v_3 = \frac{u}{\|u\|}$.

On trouve une base o.n. v_1, v_2

pour $v_3^\perp = G$.

(on peut le faire par Gram-Schmidt on commence par (v_3, u_1, u_2) libre,

G-S $\longrightarrow$ $(v_3, \underbrace{v_1, v_2})$ base o.n. de $\mathbb{R}^3$

(v_1, v_2) est une base o.n. de $G = v_3^\perp$.)

Si P = matrice de passage de la base canonique à $(v_1\ v_2\ v_3)$: $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$,

${}^tP = P^{-1}$ et

$P^{-1} A P = {}^tP A P = \begin{pmatrix} R_\theta & \\ & \lambda \end{pmatrix}$.

Vect (v_3) est l'axe de la rotation

$G =$ Vect (v_1, v_2) est le plan de rotation.

Réduction d'un endom. orthog. en dim quelconque.

On ne peut pas forcément diagonaliser un endom. orthog.

Par exemple, soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

$$\lambda I_2 - R_\theta = \begin{pmatrix} \lambda - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \lambda - \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det = (\lambda - \cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = \lambda^2 - 2\cos\theta\,\lambda + 1.$$

$$\Delta = 4(\cos\theta)^2 - 4 = -4(\sin\theta)^2 \leq 0 :$$

$= 0 \iff \theta = n\pi.$

$< 0 \iff \theta \neq n\pi.$

$\theta = 2n\pi$: $R_\theta = I_3$

$\theta = (2n+1)\pi$ $R_\theta = -I_3$

tout autre cas : R_θ n'est pas diagonalisable.

<u>But</u> : Mq. les rotation sont « l'unique obstruction » à la diagonalisation d'un endom. orthog.

Càd : Si E est un esp euclidien

de dim n, et $f \in \mathcal{E}nd(E)$ est orthog

alors : $\exists$ base o.n. $(e_1 \dots e_n)$ de E

tq : $\mathrm{Mat}_{(e_1 \dots e_n)} f = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & & & & \\ & R_{\theta_2} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & R_{\theta_k} & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$

(k blocs de rotation

ℓ 1

m 1

tq $2k + \ell + m = n$

et $\theta_i \neq$ multiple de π)

Pour cela : cherchons les val pr. complexes.

Soit $A \in O(n)$ une matrice orthog. $(A \in M_n(\mathbb{R}))$

Soit $\underline{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}$ une val pr. complexe non réelle.

Soit X un vect pr : $X \in \mathbb{C}^3$.

donc $AX = \lambda X$

$A\overline{X} = \overline{A}\overline{X} = \overline{AX} = \overline{\lambda X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$:

$\overline{X}$ est aussi un vect pr. de A, de val pr. $\overline{\lambda}$.

or $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \neq \overline{\lambda} \Rightarrow X$ et $\overline{X}$ ne sont pas colinéaires dans $\mathbb{C}^3$.

$\Rightarrow \quad Y := X + \overline{X} \neq 0. \qquad Y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$

- $AY = AX + A\overline{X} = \lambda X + \overline{\lambda}\overline{X}.$
- $A^2 Y = \lambda^2 X + \overline{\lambda}^2 \overline{X}$
- $(\lambda + \overline{\lambda}) AY - \lambda\overline{\lambda} Y = (\lambda + \overline{\lambda})(\lambda X + \overline{\lambda}\overline{X}) - \lambda\overline{\lambda} X - \lambda\overline{\lambda}\overline{X}$

$$= \lambda^2 X + \cancel{\lambda\overline{\lambda} X} + \cancel{\lambda\overline{\lambda}\overline{X}} + \overline{\lambda}^2 \overline{X} - \cancel{\lambda\overline{\lambda} X} - \cancel{\lambda\overline{\lambda}\overline{X}}$$

$$= A^2 Y.$$

autrement dit : $A^2 Y \in \underbrace{\mathrm{Vect}(Y, AY)}_{F}.$

Donc F est stable par A.
et $Y, AY \in \mathbb{R}^3$.

$\therefore$ Si A admet une val. pr. complexe non réelle alors $\exists$ $F \subseteq \mathbb{R}^n$ de dim $= 2$ stable par A.

Donc on a démontré :

<u>Lemme</u> Soit E euclidien $f \in \mathcal{E}nd(E)$ orthog. si $\dim E > 0$, alors E admet un s.e.v. de dim 1 ou 2 stable par f.

<u>Preuve</u> : - Si f admet un vect. pr. v :

$\mathrm{Vect}(v)$ est stable par f, $\dim \mathrm{Vect}(v) = 1$.

- Si f n'admet aucun vect pr. :

On choisit une base o.n. $(e_1, \dots, e_n) = \mathcal{B}$.

$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$ est une matrice orthog.

elle admet au moins une val. pr. complexe λ. Or, $\lambda \notin \mathbb{R}$ (sinon f admettrait des vect. pr.)

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Donc $\exists$ $F \subseteq \mathbb{R}^n$ un s.e.v. de dim 2 stable par A (d'après le calcul que nous venons de faire)

$\Rightarrow \exists$ $F \subseteq E$ s.e.v. de dim 2 stable par f.