# ANALYSE RÉELLE

**Notes du cours L3 années 2007, 2009, 2010**

**Johannes Kellendonk** **(Version 1, 2007)** `kellendonk@math.univ-lyon1.fr`
**Itaï Ben Yaacov** **(Version 1.9.1088, 4th May 2010)** `http://math.univ-lyon1.fr/~begnac/`

Université Claude Bernard Lyon I

# Table des matières

# Chapitre 1

# Fonctions continues

Les resultats de ce chapitre sont formulés pour des espaces métriques. Néanmoins ils restent vrais pour des espaces topologiques.

## 1.1 Convergence uniforme

Dans ce chapitre $X$ denote un espace métrique et $K = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. On note $C(X, K)$ l'espace des fonctions continues de $X$ à valeurs dans $K$. On dit qu'une fonction $f \in C(X, K)$ s'annulle à l'infini si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un compact $Y \subset X$ t.q. $|f(x)| < \epsilon$ pour $x \notin Y$. On note par $C_0(X, K)$ le sous-espace $C(X, K)$ des fonctions qui s'annullent à l'infini. En particulier, les fonctions de $C_0(X, K)$ sont bornées. On note aussi que, si $X$ est compact toute fonction s'annulle à l'infini, donc $C_0(X) = C(X)$.

**Définition 1.1.1.** On appelle

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

la *norme sup* ou *norme* $\infty$ de $f \in C_0(X, K)$. Une suite $(f_n)_n$ des fonctions de $C(X, K)$ converge *uniformément* vers une fonction $f : X \to K$ si la suite des nombres $\|f - f_n\|_\infty$ tend vers $0$ pour $n \to \infty$. On va utiliser les notations $f_n \stackrel{u}{\longrightarrow} f$ ou $f_n \stackrel{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f$ pour la convergence uniforme.

La convergence uniforme d'une suite $(f_n)_n$ des fonctions vers $f$ entraine la convergence ponctuelle: $\forall x \in X : f_n(x) \longrightarrow f(x)$, mais la réciproque n'est pas juste.

Les résultats suivants font partie du cours Topologie.

**Théorème 1.1.2.** *Si la suite $(f_n)_n$ des fonctions de $C_0(X, K)$ converge uniformément vers une fonction $f : X \to K$ alors $f$ est continue.*

**Théorème 1.1.3.** $(C_0(X, K), \|\cdot\|_\infty)$ *est un espace de Banach (c'est-à-dire, un espace vectoriel normé qui est complet : toute suite de Cauchy admet une limite).*

Le produit $(fg)(x) = f(x)g(x)$ est associatif et distributif. Il défini donc la structure d'une algèbre sur $C_0(X, K)$.

**Lemme 1.1.4.** $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

## 1.2 Le Théorème de Stone-Weierstraß

On va maintenant considérer le cas où $X$ est compact et se poser le problème d'approximer une fonction continue en sup-norme par des fonctions plus simples.

**Théorème 1.2.1** (Stone-Weierstraß). *Soit $X$ un espace métrique compact et $K = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Soit $A \subset C(X, K)$ t.q.:*

*(i) $A$ est une sous-algèbre auto-adjointe (c'est-à-dire, $f \in A$ implique $\overline{f} \in A$).*

*(ii) $A$ contient les fonctions constantes.*

*(iii) $A$ sépare les points de $X$ (c'est-à-dire, pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe une fonction $f \in A$ t.q. $f(x) \neq f(y)$).*

*Alors $A$ est dense dans $C(X, K)$ pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Autrement dit, pour toute fonction $f \in C(X, K)$ il existe une suite $(f_n)_n$ dans $A$ qui converge uniformément vers $f$.*

*Exemple* 1.2.2. Soit $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact et $A$ l'algèbre des polynômes sur $[a, b]$ à valeur dans $K$. $X$ est compact et $A$ satisfait les critères du Théorème 1.2.1 (le polynôme $P(x) = x$ sépare les points). Donc toute fonction continue sur $[a, b]$ (à valeur dans $K$) peut être approximée par des polynômes sur $[a, b]$.

*Remarque* 1.2.3. L'hypothèse de compacité est nécessaire. En effet, aucune fonction non polynômiale ne peut être approximée uniformément par des polynôme sur $\mathbb{R}$ tout entier.

*Exemple* 1.2.4. Soit $X = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et $A$ l'algèbre des polynômes de Laurent sur $S^1$ à valeur dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire, $L \in A$ est de la forme

$$L(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n$$

pour un certain $N \in \mathbb{N}$ avec $a_n \in \mathbb{C}$. Comme $\bar{z} = z^{-1}$ sur $S^1$ on a $\overline{L}(z) = \sum_{n=-N}^{N} \overline{a_{-n}} z^n$, donc $A$ est autoadjoint. $A$ satisfait les critères du Théorème 1.2.1 et donc est dense dans $C(S^1, \mathbb{C})$.

Posons $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}(t) = f(e^{it})$ pour $f \in C(S^1, \mathbb{C})$. Alors $\tilde{f}$ est continue et $2\pi$-périodique. La densité de $A$ dans $C(S^1, \mathbb{C})$ veut donc dire que toute fonction continue et $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$ (à valeur dans $\mathbb{C}$) peut être approximée par des polynômes trigonométriques, comme on appelle les fonctions de la forme $\tilde{L}(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$.

## 1.3 Preuve du théorème de Stone-Weierstraß

La démonstration est élémentaire mais longue. Nous la divisons en plusieurs étapes.

**Lemme 1.3.1.** *Il existe une suite de polynômes $P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ qui converge uniformément vers $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$. (Notons que ceci est un cas particulier du théorème de Stone-Weierstraß, où $X = [-1, 1]$, $K = \mathbb{R}$, $A \subseteq C([-1, 1], \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions polynômiales, et nous voulons montrer que $f \in \overline{A}$.)*

*Démonstration.* Nous définissons par récurrence:

$$P_0(x) = 0, \qquad P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(P_n(x)^2 + x). \tag{1.1}$$

Un simple calcul donne:

$$2P_{n+2} - 2P_{n+1} = P_{n+1}^2 - P_n^2 = (P_{n+1} + P_n)(P_{n+1} - P_n)$$

d'où

$$P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}(P_{n+1} + P_n)(P_{n+1} - P_n). \tag{1.2}$$

On vérifie aisément par récurrence que:

(i) $P_n(x)$ est croissant sur $[0,1]$, et $0 \leq P_n(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0,1]$. (par (1.1)), et

(ii) $P_{n+1}(x) - P_n(x)$ est croissant sur $[0,1]$, et $0 \leq P_{n+1}(x) - P_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ (par (1.2)).

En particulier, pour tout $n$ et pour tout $x \in [0,1]$:

$$0 \leq P_{n+1}(x) - P_n(x) \leq P_{n+1}(1) - P_n(1),$$

d'où, pour tout $n \leq m$ (et tout $x \in [0,1]$):

$$0 \leq P_m(x) - P_n(x) \leq P_m(1) - P_n(1),$$

et

$$\|P_m - P_n\|_\infty \leq |P_m(1) - P_n(1)|,$$

Or, la suite $P_n(1)$ est croissante et bornée (par 1), donc convergente, et en particulier de Cauchy. Par conséquence, la suite des fonctions $P_n$ est de Cauchy dans dans $C([0,1],\mathbb{R})$. Par complétude de ce dernier, il existe une fonction continue $g \in C(X,\mathbb{R})$ telle que $P_n \to g$ uniformément sur $[0,1]$.

En particulier $P_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$, d'où

$$g(x) = \frac{1}{2}(g(x)^2 - x), \qquad \text{ou :} \qquad \big(1 - g(x)\big)^2 = 1 - x.$$

Or, nous savons déjà que $1 - g(x) \geq 1$, d'où:

$$1 - g(x) = \sqrt{1-x}, \qquad \text{i.e.,} \qquad g(x) = 1 - \sqrt{1-x}.$$

On a donc $P_n(x) \to 1 - \sqrt{1-x}$ uniformément sur $[0,1]$. On en conclut que $1 - P_n(1-x^2) \to \sqrt{x^2} = |x|$ uniformément sur $[-1,1]$. $\blacksquare_{1.3.1}$

**Lemme 1.3.2** (Théorème de Stone-Weierstraß pour les treillis)**.** *Soit $X$ un espace compact contenant au moins deux points, $A \subseteq C(X,\mathbb{R})$, et supposons que:*

(i) *Pour tous $x \neq y$ dans $X$, tous $r,s \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $f \in A$ telle que $|f(x) - r| < \varepsilon$ et $|f(y) - s| < \varepsilon$.*

(ii) *Pour tous $f,g \in A$ on as aussi $\max(f,g) \in A$ et $\min(f,g) \in A$.*

*Alors $A$ est dense dans $C(X,\mathbb{R})$.*

*Démonstration.* Soit $h \in C(X,\mathbb{R})$, et soit $\varepsilon > 0$ donné. D'abord, pour tous $x,y \in X$ nous trouvons une fonctions $f_{xy} \in A$ telle que $|f_{xy}(x) - h(x)| < \varepsilon$ et $|f_{xy}(y) - h(y)| < \varepsilon$ (comment fait-on si $x = y$?). En particulier on a:

$$f_{xy}(x) < h(x) + \varepsilon, \qquad f_{xy}(y) > h(y) - \varepsilon.$$

Fixons $x \in X$, et pour tout $y \in X$ posons $U_{xy} = \{z \in X : f_{xy}(z) > h(z) - \varepsilon\}$, observant que c'est un voisinage ouvert de $y$. On a donc $X = \bigcup_{y \in X} U_{xy}$, et par compacité il existent $y_0, \ldots, y_{m-1} \in X$

tels que $X = \bigcup_{i=0}^{m-1} U_{xy_i}$. Nous posons alors $g_x = \max(f_{xy_0}, \ldots, f_{xy_{m-1}})$. Par hypothèse $g_x \in A$. et par construction nous avons:

$$g_x(x) < h(x) + \varepsilon, \qquad g_x(z) > h(z) - \varepsilon \quad \text{quelque soit } z \in X.$$

Nous construisons $g_x \in A$ avec ces propriétés pour chaque $x \in X$, et posons $V_x = \{z \in X : g_x(z) < h(x) + \varepsilon\}$. Comme avant, $V_x$ est un voisinage de $x$, d'où $X = \bigcup_{x \in X} V_x$, et par compacité il existent $x_0, \ldots, x_{k-1}$ tels que $X = \bigcup_{j=0}^{k-1}$. Nous posons alors $h_\varepsilon = \min(g_{x_0}, \ldots, g_{x_{k-1}})$. Par hypothèse $h_\varepsilon \in A$. et par construction nous avons:

$$h_\varepsilon(z) < h(z) + \varepsilon, \qquad h_\varepsilon(z) > h(z) - \varepsilon \quad \text{quelque soit } z \in X.$$

Autrement dit, $\|h - h_\varepsilon\| < \varepsilon$. Comme un tel $h_\varepsilon \in A$ existe pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons démontré que $h \in \overline{A}$. $\blacksquare_{1.3.2}$

*Démonstration du Théorème de Stone-Weierstraß.* Nous observons d'abord que l'adhérence $\overline{A}$ satisfait elle aussi toutes les hypothèses du théorème. En effet, si $f_n \to f$ et $g_n \to g$ uniformément, où $f_n, g_n \in A$, alors il existe nécessairement $M \in \mathbb{R}$ qui majore $\|f_n\|_\infty$, $\|f\|$, $\|g_n\|_\infty$ et $\|g\|$ pour tout $n$. Dans ce cas on a pour tout $x \in X$:

$$\begin{aligned}
\|(f_n + g_n) - (f + g)\|_\infty &\leq \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty, \\
\|f_n g_n - fg\|_\infty &= \|f_n(g_n - g) + g(f_n - f)\|_\infty \\
&\leq \|f_n\|_\infty \|(g_n - g)\|_\infty + \|g\|_\infty \|(f_n - f)\|_\infty \\
&\leq M\|(g_n - g)\|_\infty + M\|(f_n - f)\|_\infty, \\
\|\bar{f}_n - \bar{f}\|_\infty &= \|f_n - f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Nous obtenons que $f_n + g_n \to f + g$, $f_n g_n \to fg$ et $\bar{f}_n \to \bar{f}$ uniformément, d'où $f + g \in \overline{A}$, $fg \in \overline{A}$ et $\bar{f} \in \overline{A}$. Cela montre que $\overline{A}$ est également une sous algèbre auto-adjointe. Le fait que $\overline{A}$ contient les fonctions constantes et sépare les points découle de $A \subseteq \overline{A}$. Comme il nous suffirait d'ailleurs de démontrer que $\overline{A}$ est dense dans $C(X, K)$ (et donc égal à $C(X, K)$), nous pouvons supposer que $A$ est fermé dans $C(X, K)$.

Nous traitons d'abord le cas réel, $K = \mathbb{R}$. Si $X$ ne consiste que d'un seul point, toute fonction dans $C(X, \mathbb{R})$ est constante, d'où $A = C(X, \mathbb{R})$ par hypothèse. Nous pouvons donc supposer que $X$ contient au moins deux points.

Soit $(Q_n(x))_n$ la suite de polynômes dans $\mathbb{R}[x]$ qui converge uniformément vers $|x|$ sur $[-1, 1]$. Si $f \in A$ satisfait $\|f\|_\infty \leq 1$ alors $Q_n(f) \in A$ (car $A$ est une $\mathbb{R}$-algèbre contenant les constantes) et $Q_n(f) \to |f|$ uniformément (car $f(x) \in [-1, 1]$ pour tout $x \in X$). Comme est supposé fermé, $|f| \in A$. Si $\|f\|_\infty > 1$ nous avons $\frac{f}{\|f\|_\infty} \in A$, $\left\| \frac{f}{\|f\|_\infty} \right\|_\infty = 1$ et $|f| = \|f\|_\infty \left| \frac{f}{\|f\|_\infty} \right| \in A$. Ainsi, $|f| \in A$ pour tout $f \in A$. Si $g \in A$ est une autre fonction alors:

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in A, \qquad \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in A.$$

Soient maintenant $x \neq y \in X$, $r, s \in \mathbb{R}$. Alors il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Posons $g(z) = r + \frac{f(z) - f(x)}{f(y) - f(x)}(s - r)$. Alors $g \in A$, $g(x) = r$ et $g(y) = s$. D'après le résultat précédent, $A$ est dense dans $C(X, \mathbb{R})$, et donc $A = C(X, \mathbb{R})$ (car $A$ est fermé). Ceci conclut la démonstration du cas réel.

Dans le cas complexe, nous supposons également que $f \in A \Longrightarrow \bar{f} \in A$. Posons $A' = A \cap C(X, \mathbb{R})$. Alors pour tout $f \in A$ nous avons $Re(f) = \frac{f + \bar{f}}{2} \in A'$ et $Im(f) = Re(-if) \in A'$. Il est facile à vérifier que $A'$ vérifie les hypothèses du cas réel, d'où $A' = C(X, \mathbb{R})$. Or, toute fonction $f \in C(X, \mathbb{C})$ peut être écrite comme $f = g + ih$ où $g, h \in C(X, \mathbb{R}) = A' \subseteq A$, et comme $A$ est une $\mathbb{C}$-algèbre: $f = g + ih \in A$. On a démontré que $A = C(X, \mathbb{C})$, et la preuve est finie. $\blacksquare_{1.3.2}$

# Chapitre 2

# Les espaces $L^p$

## 2.1 Définition, inégalités de Hölder et de Minkowski

Les resultat sont formulés pour un espace mésuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ quelconque, mais nous sommes principalement intéressés au cas que $\Omega$ est une partie borelienne de $\mathbb{R}^n$ (avec tribu borelien) et mesure de Lebesgue, ou, dans le cas où $\Omega$ est discret, avec la mesure discrète.

Pour éviter des cas exceptionnels, nous étendons quelques opérations arithmétiques habituelles de $[0, \infty]$ à $[0, \infty]$ de la façon naturelle. Donc $a + \infty = \infty$ pour tout $a \in [0, \infty]$, $\infty^p = \infty$ pour $0 < p < \infty$, et ainsi de suite.

**Définition 2.1.1.** On pose, pour $p \geq 1$

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ mesurable t.q. } \|f\|_p < \infty\},$$

$$\|f\|_p = \left( \int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On pose également

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ mesurable t.q. } \|f\|_\infty < \infty\},$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0\colon |f(x)| \leq M \ \mu\text{-presque partout}\}.$$

Il est facile à vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $f$ mesurable: $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$, où nous convenons que $0 \cdot \infty = 0$. En particulier:

**Lemme 2.1.2.** *Les espaces $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ sont des $\mathbb{C}$-e.v.*

Même si $\Omega$ est un espace topologique, $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$ est différent de $C(\Omega, \mathbb{C})$ où $C_0(\Omega, \mathbb{C})$, car les fonctions du premier ne sont pas forcément continues. La définition a un sens même pour $p > 0$, mais ce qui suit seulement si $p \geq 1$. On va donc toujours supposer $p \geq 1$.

Si $p \in [1, \infty]$ on pose $q \in [1, \infty]$ t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$: si $p = 1$ alors $q = \infty$, si $p = \infty$ alors $q = 1$, et sinon: $q = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$. On dit que $p, q$ sont des *exposants conjugués*. Quelques identités pratiques pour les exposants conjugués quand $p, q > 1$:

$$p + q = pq \qquad p - 1 = \frac{p}{q}.$$

**Lemme 2.1.3** (Inégalité de Young)**.** *Soient $a, b \geq 0$ et $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués. Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Démonstration.* Si $a = 0$ ou $b = 0$ c'est facile, donc on peut supposer que $a, b > 0$.
**Méthode I (rapide):** la fonction $\exp$ est convexe, ce qui veut dire que pour tous $x, y$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ nous avons $\exp(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \exp(x) + (1-\lambda)\exp(y)$. En particulier:

$$\begin{aligned} ab = \exp(\ln(ab)) = \exp\left(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}\right) &\leq \frac{1}{p}\exp(\ln a^p) + \frac{1}{q}\exp(\ln b^q) \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \end{aligned}$$

**Méthode II (plus élémentaire):** Nous observons que $q - 1 = \frac{q}{p}$. Posons $f(t) = \frac{a^p}{p} + \frac{t^q}{q} - at$. Alors $f'(t) = t^{q-1} - a = t^{\frac{q}{p}} - a$ et $f''(t) = \frac{q}{p}t^{\frac{q}{p}-1}$. L'unique point critique de $f$ pour $0 < t$ est $t_0 = a^{\frac{p}{q}}$. Un calcul montre que $f(t_0) = \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} - a^{\frac{p}{p}+\frac{p}{q}} = a^p - a^p = 0$ et $f''(t_0) > 0$, donc $f(t_0) = 0$ est le minimum de $f$ pour $0 < t$. On en déduit que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ pour tous $a, b$, et qu'on a égalité si et seulement si $b = a^{\frac{p}{q}}$, ou encore, si et seulement si $a^p = b^q$. $\blacksquare_{2.1.3}$

**Lemme 2.1.4** (Inégalité de Hölder)**.** *Pour $f, g$ mesurables:*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

*Démonstration.* Si $p = 1$ et $q = \infty$ nous avons

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 = \int |f||g|\,d\mu &\leq \int |f|\|g\|_\infty\,d\mu = \|g\|_\infty \int |f|\,d\mu \\ &= \|f\|_1 \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Le cas $p = \infty$, $q = 1$ est similaire. Autrement, nous avons $1 < p, q < \infty$ et nous pouvons appliquer l'inégalité de Young. On suppose d'abord que $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$:

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 = \int |f||g|\,d\mu &\leq \int \left(\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}\right) d\mu \\ &= \frac{1}{p}\int |f|^p\,d\mu + \frac{1}{q}\int |g|^q\,d\mu = \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Traitons maintenant le cas général. Si $\|f\|_p = 0$ c'est que $f = 0$ presque partout, d'où $\int fg\,d\mu = 0$ et tout va bien. Même argument si $\|g\|_q = 0$, donc on peut supposer que $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$. Dans ce cas, si $\|f\|_p = \infty$ ou $\|g\|_q = \infty$ alors $\|f\|_p\|g\|_q = \infty$, et c'est bon aussi. Reste le cas $0 < \|f\|_p, \|g\|_q < \infty$. Alors $\left\|\frac{f}{\|f\|_p}\right\|_p = \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p} = 1$, $\left\|\frac{g}{\|g\|_q}\right\|_q = 1$ et:

$$\|fg\|_1 = \|f\|_p\|g\|_q \left\|\frac{f}{\|f\|_p}\frac{g}{\|g\|_q}\right\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q \cdot 1 = \|f\|_p\|g\|_q.$$

$\blacksquare_{2.1.4}$

**Corollaire 2.1.5.** *Si* $f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\Omega,\mu)$ *alors* $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$.

**Lemme 2.1.6** (Inégalité de Hölder iterée)**.** *Soit* $p_1,\cdots,p_n \in [1,\infty]$ *tel que* $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$. *Alors pour* $f_i$ *mesurable*

$$\left\|\prod_{i=1}^n f_i\right\|_1 \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence sur $n$. Pour $n=1$ c'est que $p_1=1$, et pour $n=2$ c'est l'inégalité de Hölder. Supposons pour $n$, donc, et démontrons pour $n+1$. Nécessairement il existe $i$ tel que $p_i>1$, sinon $\sum_{i=1} n+1 \frac{1}{p_i} = n+1 > 1$. On peut supposer donc que $p_{n+1}>1$. Nous posons

$$r = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}\right)^{-1} = \left(1-\frac{1}{p_{n+1}}\right)^{-1},$$

ce qui donne

$$1 \leq r < \infty, \qquad \frac{1}{r}+\frac{1}{p_{n+1}} = 1, \quad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i/r} = r\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = r\frac{1}{r} = 1.$$

Par notre hypothèse de récurrence:

$$\left\|\prod_{i=1}^n |f_i|^r\right\|_1 \leq \prod_{i=1}^n \left\||f_i|^r\right\|_{p_i/r}.$$

Nous observons maintenant que pour toute fonction $g$ et tout $p \in [1,\infty[$ :

$$\left\||g|^r\right\|_p = \|g\|_{pr}^r,$$

d'où

$$\left\|\prod_{i=1}^n f_i\right\|_r^r \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}^r, \qquad \text{ou encore} \qquad \left\|\prod_{i=1}^n f_i\right\|_r \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

Maintenant nous appliquons l'inégalité de Hölder à $\prod_{i=1}^n f_i$, $f_{n+1}$ et à $\frac{1}{r}+\frac{1}{p_{n+1}}=1$ pour obtenir:

$$\begin{aligned}\left\|\prod_{i=1}^{n+1} f_i\right\|_1 &= \left\|\left(\prod_{i=1}^n f_i\right)\cdot f_{n+1}\right\|_1 \\ &\leq \left\|\prod_{i=1}^n f_i\right\|_r \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}} \\ &\leq \left(\prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}\right)\cdot \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}} = \prod_{i=1}^{n+1} \|f_i\|_{p_i},\end{aligned}$$

et la preuve est complète. ■2.1.6

**Corollaire 2.1.7** (Inégalité de Schwarz)**.**

$$\left|\int_\Omega fg\,d\mu\right| \leq \|f\|_2\|g\|_2.$$

**Lemme 2.1.8** (Inégalité de Minkowski). *Pour $f, g$ mesurables*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{2.1}$$

*Démonstration.* Les cas $p = 1$ ou $p = \infty$ sont faciles. On peux donc supposer que $1 < p < \infty$. Soit $1 < q < \infty$ l'exposant conjugué de $p$. Si $\|f\|_p = \infty$ ou $\|g\|_p = \infty$ alors $\|f\|_p + \|g\|_p = \infty$ et c'est bon. Également, si $\|f + g\|_p = 0$ il n'y a rien à démontrer. On peut supposer donc que $0 < \|f + g\|_p$ et $\|f\|_p, \|g\|_\infty < \infty$. Démontrons d'abord que $0 < \|f + g\|_p < \infty$. En effet, pour tous $a, b \geq 0$ nous avons $(a + b)^p \leq (2a)^p + (2b)^p$, si bien que

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p \, d\mu \leq \int (|f|+|g|)^p \, d\mu \\ &\leq \int \left[(2|f|)^p + (2|g|)^p\right] d\mu = 2^p\|f\|_p^p + 2^p\|g\|_p^p < \infty.\end{aligned}$$

Multipliant (2.1) par $\|f + g\|_p^{p-1}$, il suffirait donc de démontrer que

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1}.$$

Or, par Hölder:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p \, d\mu \leq \int (|f|+|g|)|f+g|^{p-1} \, d\mu \\ &= \big\||f||f+g|^{p-1}\big\|_1 + \big\||g||f+g|^{p-1}\big\|_1 \\ &\leq \|f\|_p\big\||f+g|^{p-1}\big\|_q + \|g\|_p\big\||f+g|^{p-1}\big\|_q \\ &= (\|f\|_p\big\| + \|g\|_p)\big\||f+g|^{p-1}\big\|_q.\end{aligned}$$

Pour conclure, nous nous rappelons que $p - 1 = \frac{p}{q}$, d'où:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^{p-1} = \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} &= \left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{q}} \\ &= \left(\int |f+g|^{\frac{p}{q}\cdot q} \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \big\||f+g|^{\frac{p}{q}}\big\|_q. = \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q.\end{aligned}$$

■ 2.1.8

**Théorème 2.1.9.** *Soit $p \in [1, \infty]$. $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ une seminorme sur $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$. Le quotient*

$$L^p(\Omega,\mu) = \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)/\mathcal{N}$$

*($\mathcal{N}$ est le sous-espace des fonctions qui s'annullent sur le complément d'un ensemble de mesure nul) est un espace normé pour la norme $\|\cdot\|_p$.*

$L^p(\Omega, \mu)$ est appelé l'espace des fonctions $L^p$ sur $\Omega$, bienque ses éléments soient des classes d'équivalence des fonctions. On a l'habitude de dire qu'un élément de $L^p(\Omega, \mu)$ est une fonction, bienque strictement il s'agisse d'une classe de fonctions. En particulier, dire pour $f \in L^p(\Omega, \mu)$ que $f(x) \in Y$ pour une partie $Y \subset \mathbb{C}$ n'a pas de sens pour une mesure qui donne mesure $0$ aux points. Par contre, $f(x) \in Y$ $\mu$-p.t.$x \in \Omega$ a un sens ($\mu$-p.t.$x \in \Omega$ veut dire: pour tout $x \in \Omega$ à l'exception d'un ensemble de mesure $0$).

Nous concluons avec un résultat qui est, en quelque sorte, la réciproque de l'inégalité de Hölder.

**Lemme 2.1.10.** *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mesurable. Supposons en outre qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que*

$$\int |fg|\, d\mu \leq C\|g\|_q \qquad \forall g \in L^q(\Omega),$$

*où $\mu$ désigne la mesure de Lebesgue. Alors $f \in L^p(\Omega)$ (où $p$ et $q$ sont conjugués) et $\|f\|_p \leq C$.*

*Démonstration.* Quitte à remplacer $f$ par $|f|$ nous pouvons supposer que $f$ est positive. Considérons d'abord les cas spéciaux où $p = 1$ ou $p = \infty$. Si $p = 1$ et $q = \infty$, le résultat est immédiat en prenant $g = 1$ (la fonction constante). Si $p = \infty$ et $q = 1$, nous raisonnons par l'absurde. Supposons, en effet, que $\|f\|_\infty > C$, et posons $X = \{x \in \Omega\colon f(x) \geq \frac{\|f\|_\infty + C}{2}\}$. Alors $\mu(X) > 0$, et il existe un sous-ensemble $Y \subseteq X$ mesurable tel que $0 < \mu(Y) < \infty$. Prenons $g = \mathbb{1}_Y$. Nous obtenons

$$\tfrac{\|f\|_\infty + C}{2}\mu(Y) \leq \int fg\, d\mu \leq \|f\|_\infty \|g\|_1 = \|f\|_\infty \mu(Y),$$

une contradiction. Nous pouvons donc supposer que $1 < p, q < \infty$.

Pour $N \in \mathbb{N}$, posons $f_N(x) = \mathbb{1}_{[-N,N]^n} \cdot \min(f(x), N)$. Alors chaque $f_N$ est positive mesurable, $f_N \nearrow f$, et $\|f_N\|_p < \infty$ quelque soit $p \in [1, \infty]$. Se rappelant que $p - 1 = \frac{p}{q}$, nous obtenons:

$$\|f_N\|_p^p = \int f_N^p d\mu \leq \int f f_N^{p-1} d\mu \leq C\|f_N^{p-1}\|_q = C\|f_N\|_p^{p-1}.$$

Si $f = 0$ il n'y rien à démontrer, nous supposons donc que $f \neq 0$. Donc, pour tout $N$ assez grand nous avons $f_N \neq 0$. Nous pouvons donc diviser par $\|f_N\|_p^{p-1}$, d'où $\|f_N\|_p \leq C$. Comme $f_N \nearrow f$, nous obtenons $\|f\|_p \leq C$. ■$_{2.1.10}$

## 2.2 Complétude

**Théorème 2.2.1** (Fischer Riesz – complétude de $L^p$)**.** *$L^p(\Omega, \mu)$ est un espace normé complet pour la norme $\|\cdot\|_p$. De plus si $(f_n)_n$ est une suite de $L^p(\Omega, \mu)$ qui converge vers $f$ dans la norme $\|\cdot\|_p$, alors il existe une suite extraite $(f_{n_k})_k$ qui converge $\mu$-presque partout vers $f$, c.-à.-d. $\mu$-p.t. $x \in \Omega$: $\lim_k f_{n_k}(x) = f(x)$.*

*Démonstration.* Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega, \mu)$. Nous pouvons toujours passer à une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ telle que $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p < 2^{-k-1}$. Posons:

$$g_k = \sum_{i=0}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|, \qquad g = \sum_{i=0}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|.$$

Alors $\|g_k\|_p < 1$ pour tout $k$, $\{|g_k|^p\}$ est une suite croissante de fonctions positives qui tend vers $|g|^p$, d'où par convergence monotone: $\|g\|_p \leq 1$. En particulier on a $g(x) < \infty$ p.p. Cela veux dire que la série suivante converge absolument pour presque tout $x$, et l'on peut définir:

$$f(x) = f_{n_0}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}).$$

Là où la série ne converge pas absolument (ensemble de mesure nulle) nous pouvons poser $f(x) = 0$. Donc $f_{n_k} \to f$ p.p. En particulier, $f$ est mesurable en tant que limite p.p. de fonctions mesurables.

Il reste à montrer que $f \in L^p(\Omega, \mu)$ et que $f = \lim_k f_{n_k} = \lim_n f_n$ en $\|\cdot\|_p$. En effet, $|f| \leq |f_{n_0}| + |g|$ d'où $\|f\|_p \leq \big\||f_{n_0}| + |g|\big\|_p \leq \|f_0\|_p + \|g\|_p < \infty$. Nous pouvons aussi poser:

$$g_k^\ell = \sum_{i=\ell}^{\ell+k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|, \qquad g^\ell = \sum_{i=\ell}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|.$$

Alors $\|g_k^\ell\|_p < 2^{-\ell}$, d'où par convergence monotone $\|g^\ell\|_p \leq 2^{-\ell}$. Or, $|f - f_{n_\ell}| \leq g^\ell$, d'où

$$\|f - f_{n_\ell}\|_p \leq \|g^\ell\|_p \leq 2^{-\ell} \to_{\ell\to\infty} 0.$$

Nous avons démontré que $f_{n_k} \to f$ en $\|\cdot\|_p$. Comme $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy en $\|\cdot\|_p$, elle doit converger à la même limite. $\blacksquare_{2.2.1}$

**Corollaire 2.2.2.** *Si $(f_n)_n$ est une suite de $L^p(\Omega, \mu)$ qui converge vers $f \in L^p(\Omega, \mu)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$ et $\mu$-p.t. $x \in \Omega$: $\lim_k f_{n_k}(x) = g(x)$ pour une fonction $g$, alors $\mu$-p.t. $x \in \Omega$: $f(x) = g(x)$.*

**Corollaire 2.2.3.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega, \mu)$ t.q. la série $\sum_{n=0}^\infty f_n$ converge normalement dans la norme $\|\cdot\|_p$, c.-à.-d. $\sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_p < \infty$. Alors la série converge dans $L^p(\Omega, \mu)$, c.-à.-d. il existe $f \in L^p(\Omega, \mu)$ t.q. $\lim_k \|f - \sum_{n=0}^k f_n\|_p = 0$.*

## 2.3 Densité des fonctions continues à support compact

Ici nous supposons que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert, que l'on munit de la topologie usuelle, ainsi que de la tribu borelienne et de la mesure de Lebesgue induites de $\mathbb{R}^n$.

**Définition 2.3.1.** Nous disons qu'une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est *à support compact* s'il existe un compact $K \subseteq \Omega$ tel que $f$ vaut zéro sur $\Omega \setminus K$. Nous définissons l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\Omega$:

$$C_c(\Omega) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{C}\colon f \text{ est continue et à support compact}\}.$$

Nous appelons le *support* de $f$ dans $\Omega$ l'ensemble

$$\operatorname{supp}_\Omega(f) = \overline{\{x \in \Omega\colon f(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega,$$

où l'adhérence est par rapport à la topologie de $\Omega$. Alors $f$ est à support compact précisément quand $\operatorname{supp}_\Omega(f)$ est compact (pourquoi ?)

**Lemme 2.3.2.** *L'espace $C_c(\Omega)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.*

*Démonstration.* Soient $f, g \in C_c(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $f + g$ et $\lambda f$ sont des fonctions continues. Pour voir qu'elles sont à support compact nous vérifions aisément que:

$$\operatorname{supp}_\Omega(\lambda f) = \begin{cases} \operatorname{supp}_\Omega(f) & \lambda \neq 0 \\ \varnothing & \lambda = 0, \end{cases}$$
$$\operatorname{supp}_\Omega(f + g) \subseteq \operatorname{supp}_\Omega(f) \cup \operatorname{supp}_\Omega(g).$$

Pour $f + g$ nous utilisons aussi le fait que la réunion de deux compacts est un compact. $\blacksquare_{2.3.2}$

**Lemme 2.3.3.** *Pour tout $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert et tout $p \in [1, \infty]$,*

(i) *Toute fonction continue à support compact appartient à $L^p(\Omega)$, et pour $p = \infty$ nous avons $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$.*

(ii) *Si deux fonctions $f, g \in C_c(\Omega)$ sont égales p.p. alors elles sont égales.*

*En conséquence, nous pouvons identifier l'espace $C_c(\Omega)$ avec un sous espace vectoriel de $L^p(\Omega)$.*

*Démonstration.* Soit $f \in C_c(\Omega)$ continue à support compact. Il existe donc un compact $K \subseteq \Omega$ tel que $f$ est nulle hors de $K$. Comme $f$ est continue et $K$ compact, $f$ est bornée sur $K$, et nous pouvons poser

$$M = \sup_{x\in K} |f(x)| = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Il est clair que $M$ est une borne presque partout pour $f$, d'où $\|f\|_\infty \leq M$. Soit $M'$ une autre borne presque partout pour $f$, donc $\mu(U) = 0$ où $U = \{x \in \Omega : |f| > M'\}$. Comme $f$ est continue, $U$ est ouvert de $\Omega$ et donc de $\mathbb{R}^n$. Or, un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ a mesure de Lebesgue non nulle, d'où $U = \varnothing$. En d'autres mots $M' \geq |f(x)|$ pour tout $x$, ou encore, $M' \geq M$. On a démontré que $M$ est la plus petit borne presque partout pour $f$, c.à.d.:

$$\|f\|_\infty = M = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

En particulier, $f \in L^\infty(\Omega)$.

Pour $1 \leq p < \infty$ nous nous rappelons également que comme $K$ est compact, il est borné, donc $\mu(K)$ est fini et

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_K |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\|f\|_\infty^p \mu(K)\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty \mu(K)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

d'où $f \in L^p(\Omega)$. On a donc démontré la première affirmation.

Pour la deuxième, il suffit de montrer que si $f(x) = 0$ presque partout alors $f = 0$. En effet, l'ensemble $U = \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ est un ouvert de $\Omega$ et donc de $\mathbb{R}^n$. Comme avant, si $\mu(U) = 0$ c'est que $U = 0$, i.e., $f = 0$. ■2.3.3

Avant de démontrer le théorème suivant on se rappelle que la mesure de Lebesgue est *régulière*:

**Fait 2.3.4** (Régularité de la mesure de Lebesgue – cours d'intégration)**.** *Soit $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mesurable de mesure finie alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existent un compact $K \subseteq \mathbb{R}^n$ et un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tels que*

$$K \subseteq B \subseteq U \qquad \text{et} \qquad \mu(U \setminus B), \mu(B \setminus K) < \varepsilon.$$

*Si $B \subseteq \Omega$ où $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert alors on peut remplacer $U$ par $\Omega \cap U$, et obtenir en plus $U \subseteq \Omega$.*

**Fait 2.3.5** (Le lemme d'Urysohn – cours de topologie)**.** *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert et $K \subseteq U$ compact. Alors il existe une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ qui vaut $0$ sur $K$ et $1$ en dehors de $U$.*

**Fait 2.3.6** (Topologie - tout compact admet un voisinage compact)**.** *Soit $K \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$, où $K$ est compact et $U$ ouvert. Alors il existe un ouvert $V$ tel que $K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$, et $\bar{V}$ est compact.*

**Lemme 2.3.7.** *Soit $f : \Omega \to [0, 1]$ mesurable. Alors il existe une suite d'ensembles mesurable $A_n$ tel que $f = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \mathbb{1}_{A_n}$.*

*Démonstration.* Nous définissons pour chaque $n \geq 1$:

$$g_0(x) = 0, \qquad g_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-i} \mathbb{1}_{A_i}(x),$$
$$A_n(x) = \left\{x \colon f(x) \geq g_{n-1}(x) + 2^{-n}\right\}.$$

En d'autres mots, $g_n(x) = g_{n-1}(x) + 2^{-n}\mathbb{1}_{A_n}(x)$. Nous prétendons que $g_n(x) \leq f(x) \leq g_n(x) + 2^{-n}$ pour tout $x$ et $n$. En effet, pour $n = 0$ c'est car $0 \leq f(x) \leq 1$. Si on suppose pour $n-1$, alors $g_{n-1}(x) \leq f(x) \leq g_{n-1}(x) + 2^{-n+1} = g_{n-1}(x) + 2 \cdot 2^{-n}$. Dans le cas où $g_{n-1}(x) \leq f(x) < g_{n-1}(x) + 2^{-n}$ (donc $x \notin A_n$ et $g_n(x) = g_{n-1}(x)$) comme dans le cas où $g_{n-1}(x) + 2^{-n} \leq f(x) \leq g_{n-1}(x) + 2^{-n} + 2^{-n}$ (ici $x \in A_n$ et $g_n(x) = g_{n-1}(x) + 2^{-n}$) nous avons $g_n(x) \leq f(x) < g_n(x) + 2^{-n}$.

Par conséquence $f = \lim_n g_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mathbb{1}_{A_n}$. ■2.3.7

**Théorème 2.3.8** (Lusin)**.** *Soient $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable, telle que $\mu\{x \colon f(x) \neq 0\} < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{C})$ tel que*

$$\mu\{x \colon f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon.$$

*En outre nous pouvons choisir $g$ tel que $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.*

*Démonstration.* Posons $A = \{x \colon f(x) \neq 0\}$. Nous considérons d'abord un cas très particulier, et pas la suite nous enlèverons des hypothèse une par une.

**Premier cas:** $f \colon \Omega \to [0,1]$ **et** $A$ **est compact.** D'après Fait 2.3.6 il existe un ouvert $V$ tel que $A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq \Omega$ et $\bar{V}$ est compact.

D'après le Lemme, $f$ s'exprime de la forme $f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mathbb{1}_{A_n}$, où $A_n \subseteq \Omega$ sont mesurables. Si $x \in A_n$ alors $f(x) > 0$, donc $A_n \subseteq A \subseteq V$ pour tout $n$.

Puisque $\mu(A) < \infty$, nous avons aussi $\mu(A_n) < \infty$. D'après la régularité de la mesure, pour chaque $n$ il existe un ouvert $U_n$ et un compact $K_n$ tels que $K_n \subseteq A_n \subseteq U_n$ et $\mu(U_n \setminus K_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Posons $V_n = V \cap U_n$. Alors $V_n$ et ouvert, et puisqu'on a vu que $A_n \subseteq V$, c'est que $A_n \subseteq V_n$. En outre, $\mu(V_n \setminus K_n) \leq \mu(U_n \setminus K_n) < 2^{-n}\varepsilon$.

D'après le Lemme d'Urysohn, pour chaque $n$ il existe une fonction continue $g_n \colon \Omega \to [0,1]$ qui vaut 1 sur $K_n$ et 0 hors $V_n$. Nous posons $g = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g_n$, et prétendons que c'est la fonction recherchée.

*Continue:* puisque $\sum_{n=1}^{k} 2^{-n} g_n \to_{k\to\infty} g$ uniformément, et une limite uniforme de fonctions continues est continue.

*À support compact:* Si $g(x) \neq 0$ c'est que $g_n(x) \neq 0$ pour au moins un $n$, donc $x \in V_n \subseteq V \subseteq \bar{V}$. Or, $\bar{V}$ est compact.

*Mesure de l'erreur $< \varepsilon$:* Considérons $x \in \Omega$ et $n \geq 1$. Si $x \in K_n$, c'est que $x \in A_n$ et $g_n(x) = 1 = \mathbb{1}_{A_n}(x)$. Et si $x \notin V_n$, c'est que $x \notin A_n$ et $g_n(x) = 0 = \mathbb{1}_{A_n}(x)$. En d'autres mots, si $g_n(x) \neq \mathbb{1}_{A_n}(x)$ c'est que $x \in V_n \setminus K_n$. Maintenant, rappelons-nous que $g = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g_n$ et $f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mathbb{1}_{A_n}$. Donc, si $g(x) \neq f(x)$, c'est que $g_n(x) \neq \mathbb{1}_{A_n}(x)$ (et donc $x \in V_n \setminus K_n$) pour au moins un $n$. Alors

$$\{x \in \Omega \colon f(x) \neq g(x)\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (V_n \setminus K_n),$$

d'où

$$\mu\{x \in \Omega \colon f(x) \neq g(x)\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n \setminus K_n), < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon = \varepsilon.$$

Ceci conclut le premier cas.

**Second cas:** $f\colon \Omega \to [0,1]$. (Mais $A$ n'est pas nécessairement compact.) Puisque $\mu(A) < \infty$, d'après la régularité de la mesure, nous trouons $K \subseteq A \subseteq U$ où $U$ est ouvert, $K$ compact et $\mu(U \setminus K) < \varepsilon/2$. Posons $h = f \cdot \mathbb{1}_K$. Alors $h\colon \Omega \to [0,1]$, et $\{x\colon h(x) \neq 0\} = K$, et c'est un compact. Donc $h$ vérifie les hypothèse du premier cas, et il existe $g \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{C})$ tel que $\mu\{x\colon h(x) \neq g(x)\} < \varepsilon/2$. Nous observons que si $f(x) \neq h(x)$ c'est que $f(x) \neq 0$ et $\mathbb{1}_K(x) = 0$, i.e., que $x \in A \setminus K$. Alors:

$$\begin{aligned}\{x\colon f(x) \neq g(x)\} &\subseteq \{x\colon h(x) \neq g(x)\} \cup \{x\colon f(x) \neq h(x)\} \\ &= \{x\colon h(x) \neq g(x)\} \cup (A \setminus K),\end{aligned}$$

d'où

$$\mu\{x\colon f(x) \neq g(x)\} \leq \mu\{x\colon h(x) \neq g(x)\} + \mu(A \setminus K) < \varepsilon.$$

**Troisième cas:** $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^{\geq 0}$. On considère la suite $B_n = \{x\colon f(x) \leq n\}$. C'est une suite croissante et $\bigcup B_n = A$, donc $\mu(B_n) \to \mu(A)$. Puisque $\mu(A) < \infty$, cela veut dire que pour $N$ suffisamment grand, $\mu(B_N) > \mu(A) - \varepsilon/2$, i.e., que $\mu(A \setminus B_N) < \varepsilon/2$. Nous fixons un tel $N$, et posons $h = \frac{f \cdot \mathbb{1}_{B_N}}{N}$. Alors $h\colon \Omega \to [0,1]$, et d'après le cas précédent on trouve $g \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{C})$ tel que $\mu\{x\colon h(x) \neq g(x)\} < \varepsilon/2$. Alors $Ng \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{C})$, et si $f(x) \neq h(x)$, c'est que $x \in A \setminus B_N$. Comme dans le cas précédent:

$$\begin{aligned}\{x\colon f(x) \neq Ng(x)\} &\subseteq \{x\colon Nh(x) \neq Ng(x)\} \cup \{x\colon f(x) \neq Nh(x)\} \\ &= \{x\colon h(x) \neq g(x)\} \cup (A \setminus B_N),\end{aligned}$$

d'où

$$\mu\{x\colon f(x) \neq g(x)\} \leq \mu\{x\colon h(x) \neq g(x)\} + \mu(A \setminus B_n) < \varepsilon.$$

**Quatrième cas:** $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Posons $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$. Donc $f = f^+ - f^-$ et $f^\pm\colon \Omega \to \mathbb{R}^+$. D'après le cas précédent : il existe $g_1, g_2 \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{C})$ tels que

$$\mu\{x\colon f^+(x) \neq g_1(x)\} < \varepsilon/2, \qquad \mu\{x\colon f^-(x) \neq g_1(x)\} < \varepsilon/2,$$

d'où

$$\mu\{x\colon f(x) \neq (g_1 - g_2)(x)\} \leq \mu\{x\colon f^+(x) \neq g_1(x)\} < \varepsilon/2 + \mu\{x\colon f^-(x) \neq g_2(x)\} < \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

**Cinquième cas:** $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ **(le cas général).** Posons $f = f_r + i f_i$, où $f_r$ et $f_i$ sont les parties réelle et imaginaire de $f$, respectivement. D'après le cas précédent : il existe $g_1, g_2 \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{C})$ tels que

$$\mu\{x\colon f_r(x) \neq g_1(x)\} < \varepsilon/2, \qquad \mu\{x\colon f_i(x) \neq g_1(x)\} < \varepsilon/2,$$

d'où

$$\mu\{x\colon f(x) \neq (g_1 + i g_2)(x)\} \leq \mu\{x\colon f_r(x) \neq g_1(x)\} < \varepsilon/2 + \mu\{x\colon f_i(x) \neq g_2(x)\} < \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Il reste la partie « en outre. » Soit donc $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ comme dans les hypothèse, et $g$ comme dans la conclusion. Si $\|f\|_\infty = \infty$ alors $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et c'est bon. Si $\|f\|_\infty = 0$ on remplace $g$ par la fonction $0$, et c'est encore bon. Supposons donc que $0 < \|f\|_\infty < \infty$. Nous définissions $\zeta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\zeta(z) = \begin{cases} z & |z| \leq \|f\|_\infty \\ z\frac{\|f\|_\infty}{|z|} & |z| \geq \|f\|_\infty. \end{cases}$$

Nous remarquons que les deux définitions coïncident quand $|z| = \|f\|_\infty$. La fonction $\zeta$ est continue, donc $h = \zeta \circ g$ est continue également. Aussi, $h(x) \neq 0$ si est seulement si $g(x) \neq 0$, donc $\operatorname{supp} h = \operatorname{supp} g$ est compact, et $h \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{C})$. En outre, $|\zeta(z)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $z$, d'où $\|h\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Pour conclure, nous observons que si $f(x) = g(x)$, alors $|g(x)| \leq \|f\|_\infty$ (en dehors d'un ensemble de mesure nulle, dont on peut faire abstraction) et donc $h(x) = g(x) = f(x)$. Ainsi:

$$\{x \colon f(x) \neq h(x)\} \subseteq \{x \colon f(x) \neq g(x)\},$$
$$\mu\{x \colon f(x) \neq h(x)\} \leq \mu\{x \colon f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon.$$

Ceci termine la preuve. $\blacksquare_{2.3.8}$

**Lemme 2.3.9.** *Soit $E(\Omega)$ l'ensemble des fonctions étagées $s \colon \Omega \to \mathbb{C}$ tel que $\mu\{x \colon s(x) \neq 0\} < \infty$, à égalité presque partout près. Alors $E(\Omega)$ est dense dans $L_p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ (mais non pour $p = \infty$).*

*Démonstration.* D'abord il est facile à vérifier que $E(\Omega) \subseteq L_p(\Omega)$, et que c'est en outre un sous-$\mathbb{C}$-e.v., quelque soit $p$ (laissé en exercice). Il nous faut démontrer que tout $f \in L_p(\Omega)$ appartient à l'adhérence de $E(\Omega)$ dans $L_p(\Omega)$.

Nous considérons d'abord le cas où $f$ est réelle positive: $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^{\geq 0}$. Dans ce case, on a déjà vu dans le cours d'intégration qu'il existe une suite croissante de fonctions $s_n \in E(\Omega)$ telles que $s_n(x) \to f(x)$ à chaque point $x$. Autrement dit, $|f(x) - s_n(x)| \to 0$. Or, $|f(x) - s_n(x)| = f(x) - s_n(x) \leq f(x)$, donc $|f(x) - s_n(x)|^p \leq f(x)^p$. Or, par hypothèse $\int f^p \, d\mu < \infty$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\|f - s_n\|_p^p = \int |f - s_n|^p \, d\mu \to \int 0 \, d\mu = 0,$$

i.e., $s_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$.

Maintenant soit $f \in L_p(\Omega)$ quelconque. On peut donc l'exprimer comme

$$f = g^+ - g^- + i(h^+ - h^-),$$

où $g^\pm$ et $h^\pm$ dont réelles, positives. Nous trouvons dans $E(\Omega)$ des suites $s_{1,n} \to g^+$, $s_{2,n} \to g^-$, $s_{3,n} \to h^+$, $s_{4,n} \to h^-$. Posons $t_n = s_{1,n} - s_{2,n} + i(s_{3,n} - s_{4,n})$. Alors $t_n \in E(\Omega)$ et $t_n \to f$. $\blacksquare_{2.3.9}$

**Théorème 2.3.10.** *Pour tout ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et tout $1 \leq p < \infty$ (mais non pour $p = \infty$ !), l'ensemble $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

*En d'autres mots, pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $g \in C_c(\Omega)$ telle que $\|g - f\|_p < \varepsilon$, ou encore, il existe une suite $\{f_n\}_n \subseteq C_c(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ en $\|\cdot\|_p$.*

*Démonstration.* Puisque $E(\Omega)$ est dense dans $L_p$, il suffit de montrer que pour toute fonction $s \in E(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{C})$ t.q. $\|g - s\|_p < \varepsilon$. Puisque $s$ est étagée elle est bornée, et (par définition de $E(\Omega)$) $\mu\{x \colon s(x) \neq 0\} < \infty$. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Lusin : il existe $g \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{C})$ telle que $\|g\|_\infty \leq \|s\|_\infty$ et

$$\mu\{x \colon g(x) \neq s(x)\} < \left(\frac{\varepsilon}{2\|s\|_\infty}\right)^p.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int |g - s|^p \, d\mu &= \int_{\{x \colon g(x) \neq s(x)\}} |g - s|^p \, d\mu \\ &\leq \mu\{x \colon g(x) \neq s(x)\} \cdot \|g - s\|_\infty^p \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{2\|s\|_\infty}\right)^p (\|g\|_\infty + \|s\|_\infty)^p = \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Donc en effet, $\|g - s\|_p < \varepsilon$ et le théorème est démontré. $\blacksquare_{2.3.10}$

Pour voir les limites de ce résultat, considérons un ouvert non vide quelconque $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, et fixons $x \in \Omega$. Soit $r > 0$ assez petit pour que $B(x, 2r) \subseteq \Omega$, et posons $f = \mathbb{1}_{B(x,r)}$. Il est facile à voir que $f \in L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, \infty]$. Nous prétendons que pour toute fonction continue $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ nous avons $\|f - g\|_\infty \geq \frac{1}{2}$.

En effet, soit $y \in \Omega$ tel que $d(x, y) = r$ (e.g., $y = x + (r, 0, \ldots, 0)$). Supposons d'abord que $|g(y)| < \frac{1}{2}$, et posons $U = \{z \in \Omega\colon |g(z)| < \frac{1}{2}\}$. Par continuité de $g$, $U \cap B(x, r)$ est un ouvert non vide dans lequel $f = 1$ et donc $|f - g| > \frac{1}{2}$, d'où $\|f - g\|_\infty \geq \frac{1}{2}$. L'autre possibilité est que $|g(y)| \geq \frac{1}{2}$. Pour chaque $n$ posons $V_n = \{z \in \Omega\colon |g(z)| > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\}$. Alors encore par continuité de $g$, $V_n \smallsetminus \bar{B}(x, r)$ est un ouvert non vide sur lequel $f = 0$ et donc $|f - g| > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. Nous obtenons que $\|f - g\|_\infty \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ pour tout $n$, donc $\|f - g\|_\infty \geq \frac{1}{2}$.

En particulier, $C_c(\Omega)$ n'est jamais dense dans $L^\infty(\Omega)$ (sauf si $\Omega = \varnothing$, que l'on exclut de toute façon).

**Corollaire 2.3.11.** *Pour tout ouvert non vide $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et tout $1 \leq p < \infty$, l'espace $\big(C_c(\Omega), \|\cdot\|_p\big)$ est un espace normé* incomplet.

*Démonstration.* Le fait que $\|\cdot\|_1$ soit une norme (et non une semi-norme) sur $C_c(\Omega)$ est une conséquence du fait que $C_c(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ (cf. Lemme 2.3.3). Si cette norme était complète on aurait par densité $C_c(\Omega) = L^p(\Omega)$, ce qui n'est pas le cas: on vient juste de donner un exemple d'une fonction $f \in L^p(\Omega)$ qui n'est égale, ni même presque partout, à aucune fonction continue. $\blacksquare_{2.3.11}$

## 2.4 Convolution et inégalité de Young

**Définition 2.4.1.** Soit $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mesurables. On pose, formellement,

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y)\, dy,$$

là où l'intégrale est définie, et nous appelons $f * g$ le *produit de convolution de* $f$ et $g$.

**Lemme 2.4.2** (Distributivité du produit de convolution). *Si $(f * g)(x)$ et $(f * h)(x)$ sont définis alors $(f * (g + h))(x) = (f * g)(x) = (f * h)(x)$.*

*Démonstration.* Immédiat. $\blacksquare_{2.4.2}$

**Lemme 2.4.3** (Commutativité du produit de convolution). *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons $(f * g)(x) = (g * f)(x)$. Par cela nous entendons que l'un est défini si et seulement si l'autre est défini, dans lequel cas ils sont égaux.*

*Démonstration.* D'après le Théorème de changement de variable. $\blacksquare_{2.4.3}$

La fonction $x \mapsto (f * g)(x)$, quand est-ce quelle est bien définie ? Réponse simple: si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ alors par l'inégalité de Hölder:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

donc $f * g(x)$ existe, et

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Si, par contre, $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors par le théorème de Fubini on a que $f * g(x)$ est défini pour presque tout $x$, et

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Ceux-ci sont des cas particuliers de l'inégalité de Young.

**Lemme 2.4.4.** *Soient* $1 \leq p, q, r < \infty$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$. *Soient* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *et* $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$. *Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big|(f * g)(x) h(x)\big|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

*En particulier,* $(f * g)(x)$ *est défini presque partout.*

*Démonstration.* Il est facile à vérifier que si $|f| * |g|(x)$ existe (et est fini) alors $f * g(x)$ existe et $|f * g(x)| \leq |f| * |g|(x)$. Il suffirait donc de démontrer pour $|f|$, $|g|$ et $|h|$. Autrement dit, nous pouvons supposer que $f$, $g$ et $h$ sont des fonctions positives.

Tout d'abord, si $r = 1$ alors $p$ et $q$ sont des exposants conjugués. Il en découle que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$, d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) h(x) dx \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_1.$$

Supposons maintenant que $p = 1$, donc $q$ et $r$ sont des exposants conjugués. Posons $\tilde{g}(x) = g(-x)$. Alors $\|g\|_q = \|\tilde{g}\|_q$, et par le même raisonnement que tout à l'heure nous avons:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) h(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) h(x)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(y) \tilde{g}(y - x) h(x)\, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (\tilde{g} * h)(y)\, dy \leq \|f\|_1 \|g\|_q \|h\|_r.\end{aligned}$$

Comme $f * g = g * f$, cela recouvre aussi le cas où $q = 1$. Nous pouvons donc supposer dans la suite que $1 < p, q, r < \infty$.

Soient $p'$, $q'$ et $r'$ les exposants conjugués respectifs de $p$, $q$ et $r$ i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ et $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Posons

$$\begin{aligned}\alpha(x, y) &= f(x - y)^{\frac{p}{r'}} g(y)^{\frac{q}{r'}} \\ \beta(x, y) &= g(y)^{\frac{q}{p'}} h(x)^{\frac{r}{p'}} \\ \gamma(x, y) &= f(x - y)^{\frac{p}{q'}} h(x)^{\frac{r}{q'}}\end{aligned}$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \alpha(x, y)^{r'} dx dy = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x - y)^p g(y)^q dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} f^p(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} g^q(y) dy,$$

d'où

$$\|\alpha\|_{r'} = \|f\|_p{}^{\frac{p}{r'}} \|g\|_q{}^{\frac{q}{r'}}.$$

Ou $\|\alpha\|_{r'}$ est dans le sens de $L^{r'}(\mathbb{R}^{2n})$. D'une manière similaire on obtient

$$\|\beta\|_{p'} = \|g\|_q{}^{\frac{q}{p'}} \|h\|_r{}^{\frac{r}{p'}}, \qquad \|\gamma\|_{q'} = \|f\|_p{}^{\frac{p}{q'}} \|h\|_r{}^{\frac{r}{q'}}.$$

On vérifie en outre que $\frac{1}{r'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{p'} = 1$, d'où

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{p}, \qquad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{r}, \qquad \frac{1}{p'} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{q}.$$

On obtient:

$$\|\alpha\|_{r'}\|\beta\|_{p'}\|\gamma\|_{q'} = \|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r, \qquad (\alpha\beta\gamma)(x,y) = f(x-y)g(y)h(x).$$

En conclusion,

$$\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)h(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^{2n}}\alpha(x,y)\beta(x,y)\gamma(x,y)\,dxdy = \|\alpha\beta\gamma\|_1 \leq^* \|\alpha\|_{r'}\|\beta\|_{p'}\|\|\gamma\|_{q'} = \|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r.$$

Où $\leq^*$ découle de l'inégalité de Hölder itérée. $\blacksquare_{2.4.4}$

**Théorème 2.4.5** (Inégalité de Young). *Soient $1 \leq p,q,r \leq \infty$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, et soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors $f * g$ est défini presque partout, et appartient à $L^r(\mathbb{R}^n)$, avec*

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

*Démonstration.* Si $r = 1$ alors $p = q = 1$ et le résultat est déjà connu. Si $r = \infty$ alors $p$ et $q$ sont conjugués et le résultat est déjà connu. Ceci est en particulier le cas si $p = \infty$ (ce qui entraîne $q = 1$, $r = \infty$) ou $q = \infty$ (entraîne $p = 1$ et $r = \infty$). Nous pouvons supposer donc que $1 \leq p,q < \infty$ et $1 < r \leq \infty$.

Soit $1 \leq r' < \infty$ l'exposant conjugué de $r$. Nous avons $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r'} = 2$, et d'après le lemme précédent nous avons, pour tout $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$:

$$\int |(f*g)(x)h(x)|\,dx \leq \|f\|_p\|g\|_q\|h\|_{r'}.$$

D'après Lemme 2.1.10 il en découle que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$. $\blacksquare_{2.4.5}$

Le produit de convolution peut aussi être définit sur $\mathbb{Z}^d$ avec la mesure discrète à poids 1: pour $f,g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$,

$$(f*g)(x) := \sum_{y\in\mathbb{Z}^n} f(x-y)g(y),$$

s'il existe.

## 2.5 Densité des fonctions lisses

On se rappelle (cours de topologie) que si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f\colon X \to \mathbb{C}$ une fonction, alors

- $f$ est dite *uniformément continue* pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x,y \in \mathbb{R}^n$, si $|x-y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. La distance sur $\mathbb{R}^n$ est la distance euclidienne : $|x| = \sqrt{\sum x_i^2}$.
- Si $X$ est compact et $f$ est continue alors $f$ est uniformément continue.

**Lemme 2.5.1.** *Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Alors $f$ est uniformément continue.*

*Démonstration.* Puisque $\operatorname{supp} f$ est compact, il existe $M$ tel que $\operatorname{supp} f \subseteq [-M, M]^n$. Alors $f$ est continue, et donc uniformément continue, sur $[-M-1, M+1]^n$, qui est compact.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ donné. Il existe donc $\delta > 0$ t.q., si $x, y \in [-M-1, M+1]^n$ et $|x-y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Si $\delta > 1$, cela reste vrai aussi pour $\delta = 1$. Nous pouvons donc supposer que $0 < \delta \leq 1$. Il suffirait de montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, si $|x-y| < \delta$ alors $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Nous considérons des cas. Si $x \in [-M, M]^n$ alors $y \in [-M-1, M+1]^n$ (car $\delta \leq 1$), d'où $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Si $y \in [-M, M]^n$, le même raisonnement marche. Reste le cas où $x, y \notin [-M, M]^n$, mais alors $|f(x) - f(y)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$. ■2.5.1

**Proposition 2.5.2.** *Soit $f, j \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\int_{\mathbb{R}^n} j \, d\mu = 1$ et $j \geq 0$. Pose pour $\varepsilon > 0$*

$$j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

*Alors $f * j_\varepsilon \to f$ simplement et en $\|\cdot\|_p$ pour tout $p \in [1, \infty[$. En outre, $f * j_\varepsilon$ a support compact.*

*Démonstration.* Puisque $\operatorname{supp} j$ et $\operatorname{supp} f$ sont compacts, supposons que $\operatorname{supp} j, \operatorname{supp} f \subseteq [-M, M]^n$. Nous remarquons que:

(i) $\int j_\varepsilon = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$.
(ii) $\|f * j_\varepsilon\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.
(iii) $\operatorname{supp} j_\varepsilon \subseteq [-\varepsilon M, \varepsilon M]^n$,
(iv) $\operatorname{supp} f * j_\varepsilon \subseteq [-(1+\varepsilon)M, (1+\varepsilon)M]$. En particulier, si $\varepsilon < 1$ alors $\operatorname{supp} f * j_\varepsilon \subseteq [-2M, 2M]^n$, et de toute façon $f * j_\varepsilon$ est de support borné, donc compact.

Montrons d'abord la convergence simple. On se donne $r > 0$ très petit. Alors il existe un $\delta > 0$ tel que, si $|x-y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < r$. Pour tout $\varepsilon < \frac{\delta}{\sqrt{n}M}$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in [-\varepsilon M, \varepsilon M]^n$ nous avons alors

$$|y| \leq \sqrt{n}\varepsilon M < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x-y) - f(x)| < r,$$

d'où

$$\begin{aligned}
|f * j_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int f(x-y) j_\varepsilon(y) \, dy - \int f(x) j_\varepsilon(y) \, dy \right| \\
&= \left| \int [f(x-y) - f(x)] j_\varepsilon(y) \, dy \right| \\
&\leq \int |f(x-y) - f(x)| j_\varepsilon(y) \, dy \\
&= \int_{[-\varepsilon M, \varepsilon M]^n} |f(x-y) - f(x)| j_\varepsilon(y) \, dy \\
&\leq \int_{[-\varepsilon M, \varepsilon M]^n} r j_\varepsilon(y) \, dy \\
&= r.
\end{aligned}$$

Nous avons donc bien $|f * j_\varepsilon(x) - f(x)| \to_{\varepsilon \to 0} 0$ quand $\varepsilon \to 0$, d'où la convergence simple. Pour $p \in [1, \infty[$ cela donne $|f * j_\varepsilon(x) - f(x)|^p \to_{\varepsilon \to 0} 0$. Posons maintenant $h = \mathbb{1}_{[-2M, 2M]^n} (2\|f\|_\infty)^p$. Alors $\int h < \infty$, et dès que $\varepsilon < 1$, nous avons $|f * j_\varepsilon - f|^p \leq h$. D'après le Théorème de la Convergence Dominée:

$$\|f * j_\varepsilon - f\|_p^p = \int |f * j_\varepsilon - f|^p \to_{\varepsilon \to 0} 0,$$

d'où la convergence en norme $\|\cdot\|_p$. ■2.5.2

**Définition 2.5.3.** Soit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et pose

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n} f(x)}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, est lisse si $D^\alpha f$ est continue pour tout $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. On note $C^\infty(U)$ les fonctions lisses de $U \to \mathbb{C}$, $C_c(U)$ les fonctions continue à support compact et $C_c^\infty(U) = C_c(U) \cap C^\infty(U)$.

**Fait 2.5.4.** *La fonction*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0. \end{cases}$$

*de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lisse.*

**Lemme 2.5.5.** *Il existe une fonction $j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive telle que $\int j \, d\mu = 1$.*

*Démonstration.* Nous observons que $x \mapsto |x|^2 = \sum x_i^2$ est lisse sur $\mathbb{R}^n$. Il en découle que

$$g(x) = f(1 - |x|^2) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x| < 1 \end{cases}$$

est lisse sur $\mathbb{R}^n$. Elle est positive et non nulle d'où $\int g > 0$. Aussi, $\operatorname{supp} g \subseteq [-1,1]^n$ d'où $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\|g\|_1 < \infty$. Finalement $j = \frac{g}{\|g\|_1}$ est comme voulu. $\blacksquare_{2.5.5}$

Rappel (théorème de la valeur moyenne): soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in ]a,b[$ t.q.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

**Lemme 2.5.6.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j$ positive. Alors $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et*

$$D^\alpha(f * j) = f * j$$

*si en outre $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ alors $f * j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

*Démonstration.* Pour voir que $D^\alpha(f * j) = f * D^\alpha j$ il suffirait de montrer que $\frac{\partial}{\partial x_i}(f * j) = f * \frac{\partial}{\partial x_i} j$, le cas général en découle par récurrence. Aussi, il suffit de considérer le cas de $x_1$. Puisque $\frac{\partial}{\partial x_i} j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, c'est en particulier une fonction uniformément continue : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q.... On se donne un $\varepsilon > 0$ très petit, et le $\delta > 0$ qui correspond.

Soit maintenant $v = (1, 0, ...0) \in \mathbb{R}^n$. Posons $g_h(y) = \frac{j(y+hv) - j(y)}{h}$. Alors on calcule que:

$$\frac{f * j(x + hv) - f * j(x)}{h} = f * g_h(x).$$

D'après le théorème de la valeur moyenne, pour tout $y$ il existe $h'$ tq $|h'| < |h|$ et

$$g_h(y) = \frac{\partial}{\partial x_1} j(y + h'v).$$

Si en outre $|h| < \delta$, on obtient

$$\left| g_h(y) - \frac{\partial}{\partial x_1} j(y) \right| < \varepsilon.$$

Donc, pour $|h| < \delta$, on a:

$$\begin{aligned}\left| \frac{f * j(x + hv) - f * j(x)}{h} - f * \frac{\partial}{\partial x_1} j(x) \right| &= \left| f * g_h(x) - f * \frac{\partial}{\partial x_1} j(x) \right| \\ &= \left| \int f(y) \left( g_h(x-y) - \frac{\partial}{\partial x_1} j(x-y) \right) dy \right| \\ &\leq \int |f|(x-y)|\varepsilon \, dy \\ &\leq \varepsilon \|f\|_1.\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon$ peut être choisi arbitrairement petit, ceci montre exactement que

$$\frac{f * j(x + hv) - f * j(x)}{h} \to_{h \to 0} f * \frac{\partial}{\partial x_1} j(x),$$

i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f * j = f * \frac{\partial}{\partial x_1} j. \qquad \blacksquare_{2.5.6}$$

**Théorème 2.5.7** (Densité des fonctions lisses). *Pour tout $p \in [1, \infty[$, le sous-espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ est dense (pour la norme $\|\cdot\|_p$).*

*Démonstration.* Puisque $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, il suffit de montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ en $\|\cdot\|_p$.

En effet, soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ (donc en particulier, $f \in L^1(\mathbb{R})$). Soit aussi $j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, positive, $\int j = 1$. Alors $f * j_\varepsilon \to_{\varepsilon \to 0} f$ en $\|\cdot\|_p$, et chaque $f * j_\varepsilon$ est $\mathcal{C}^\infty$ de support compact. $\blacksquare_{2.5.7}$

# Chapitre 3

# Espaces de Hilbert

## 3.1 Produits scalaires et notion d'espace de Hilbert

**Définition 3.1.1.** Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel complexe. Un produit scalaire est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ vérifiant

(i) $\forall y \in \mathcal{H}$: $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire (en $x$),

(ii) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$,

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ et si $\langle x, x \rangle = 0$ alors $x = 0$.

Par conséquence $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est anti-linéaire (en $y$). Nous définissons la norme de $x \in \mathcal{H}$ (mais il faudra démontrer que c'est en effet une norme !):

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

*Exemple* 3.1.2. $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un borelien (avec mesure de Lebesgue ou mesure discret). Si $f, g \in L^2(\Omega)$ alors $f\bar{g} \in L^1(\Omega)$ et

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f\bar{g}$$

est bien défini, et $\|f\| = \sqrt{\int |f|^2} = \|f\|_2$. Nous avons comme cas particuliers $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ ($\Omega$ un ensemble de $n$ points avec mesure discrète) et $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ ($\Omega = \mathbb{N}$ avec la mesure discrète).

Dans le cas général nous devons montrer que $\|\cdot\|$ est bien une norme. Nous commençons avec le calcul suivant:

**Lemme 3.1.3.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel complexe avec produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors pour $x, y \in \mathcal{H}$*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2Re\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

■ 3.1.3

Nous vérifions aisément certaines propriétés d'une norme pour $\|\cdot\|$:

– $\|x\| \geq 0$ par définition, et si $\|x\| = 0$ c'est que $\langle x, x\rangle = 0$ et donc $x = 0$.
– Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ nous avons $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\|x\|$.

**Proposition 3.1.4** (Inégalité de Cauchy Schwarz)**.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel complexe avec produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Alors pour $x, y \in \mathcal{H}$*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

*Démonstration.* Si $\|x\| = 0$ c'est que $x = 0$ et l'inégalité est immédiate. Sinon, $\|x\| > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$0 \leq \|tx + y\|^2 = \|x\|^2 t^2 + 2Re\langle x, y\rangle t + \|y\|^2.$$

La discriminante de ce polynôme quadratique doit donc être $\leq 0$:

$$0 \geq \big(2Re\langle x, y\rangle\big)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2,$$

d'où

$$\|x\|\|y\| \geq |Re\langle x, y\rangle| \geq Re\langle x, y\rangle.$$

Maintenant, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $\langle x, y\rangle = \alpha|\langle x, y\rangle|$, d'où $\bar{\alpha}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$ et

$$\|x\|\|y\| = \|x\|\|\alpha y\| \geq Re\langle x, \alpha y\rangle = Re\big(\bar{\alpha}\langle x, y\rangle\big) = Re|\langle x, y\rangle| = |\langle x, y\rangle|. \qquad \blacksquare_{3.1.4}$$

**Corollaire 3.1.5.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel complexe avec produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Alors $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ défini une norme.*

*Démonstration.* Il ne nous reste à vérifier que l'inégalité du triangle. En effet, passant aux carrés,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2. \qquad \blacksquare_{3.1.5}\end{aligned}$$

Cette norme est dite la *norme associée* au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

**Définition 3.1.6.** On dit que deux vecteurs $x, y$ d'un espace vectoriel complexe sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ si $\langle x, y\rangle = 0$.

**Lemme 3.1.7.** *Soient $x, y$ deux vecteurs d'un espace vectoriel complexe $\mathcal{H}$. Alors on a*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right).$$

*En plus on a* l'identité de la médiane *ou* du parallélogramme

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

*Si $x$ et $y$ sont orthogonaux on a* l'identité de Pythagore

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

*Démonstration.* Par Lemme 3.1.3,

$$\|x+y\|^2 = \big(\|x\|^2 + 2Re\langle x,y\rangle + \|y\|^2\big), \qquad \|x-y\|^2 = \big(\|x\|^2 - 2Re\langle x,y\rangle + \|y\|^2\big),$$

d'où

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \qquad \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4Re\langle x,y\rangle.$$

Nous avons donc démontré l'identité du parallélogramme. Nous en déduisons également que

$$Re\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big),$$
$$Im\langle x,y\rangle = Re\big(-i\langle x,y\rangle\big) = Re\langle x,iy\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\big),$$

Ce qui établit la première identité. Finalement, si $x \perp y$:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re(0) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$ ■3.1.7

**Définition 3.1.8.** Un espace de Hilbert est un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associé.

*Exemple* 3.1.9. $L^2(\Omega)$ comme plus haut. La complétude a été démontrée dans Théorème de Fischer-Riesz.

## 3.2 Somme directe et orthocomplement

**Définition 3.2.1.** Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux sous-espaces vectoriels. On dit que $\mathcal{H}$ est la somme direct de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, notée $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$ et $\forall x_1 \in \mathcal{H}_1, x_2 \in \mathcal{H}_2$: $\langle x_1, x_2\rangle = 0$. L'orthocomplement d'un sous-espace $F \subset \mathcal{H}$ est $F^\perp := \{x \in \mathcal{H} | \forall y \in F : \langle x,y\rangle = 0\}$.

**Théorème 3.2.2.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $F \subset \mathcal{H}$ un sous-espace fermé. Soit $x \in \mathcal{H}$. Alors*

(i) *Il existe un unique $y \in F$ qui satisfait*

$$\|x-y\| = d(x,F) := \inf\{\|x-z\| : z \in F\}.$$

*On note $y = p_F(x)$. Ceci définit alors une application*

$$p_F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}.$$

(ii) *$p_F(x)$ est l'unique vecteur dans $F$ qui satisfait $x - p_F(x) \perp F$.*

(iii) *$\forall x \in \mathcal{H}$: $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2$.*

(iv) *L'application $p_F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est linéaire est continue. C'est la projection sur $F$ le long $F^\perp$.*

(v) *L'orthocomplement $F^\perp$ est un sous espace fermé de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H} = F \oplus F^\perp$.*

*Démonstration.* Pour $\varepsilon > 0$, prenons $y, z \in F$ et supposons que $d(x,y)^2 \le d(x,F)^2 + \varepsilon$ et $d(x,z)^2 < d(x,F)^2 + \varepsilon$. Posons: $w = \frac{y+z}{2}$, $u = \frac{y-z}{2}$, de telle façon que $w \in F$ et $y = w+u$, $z = w-u$. D'après l'identité du parallélogramme:

$$\|(x-w)+u\|^2 + \|(x-w)-u\|^2 = 2\big(\|x-w\|^2 + \|u\|^2\big)$$
$$\frac{\|x-z\|^2 + \|x-y\|^2}{2} = d(x,w)^2 + \frac{1}{4}d(y,z)^2$$
$$d(x,F)^2 + \varepsilon > d(x,F)^2 + \frac{1}{4}d(y,z)^2$$
$$d(y,z) < 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Soit maintenant $(y_n) \subseteq F$ une suite telle que $d(x, y_n) \to d(x, F)$. Alors d'après notre calcul c'est une suite de Cauchy, qui doit donc converger ver un $y \in F$ (puisque $\mathcal{H}$ est complet et $F$ fermé). Nous obtenons $d(x, y) = \lim d(x, y_n) = d(x, F)$. Pour l'unicité, supposons que $z \in F$ vérifie lui aussi $d(x, z) = d(x, F)$. Alors encore d'après notre calcul $d(y, z) < 2\sqrt{\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui donne $d(y, z) = 0$ et $y = z$. Ceci montre le premier point et donc l'existence de l'application $P_F$.

Pour le deuxième point, supposons que $x - P_F(x) \not\perp F$. Il existe donc $z \in F$ tel que $\langle x - P_f(x), z\rangle = s \neq 0$, et quitte à diviser $z$ par $\bar{s}$ nous pouvons supposer que $\langle x - P_f(x), z\rangle = 1$. Soit encore $t$ une variable réelle. Alors $P_F(x) + tz \in F$ et

$$d(x, P_F(x) + tz)^2 = \|x - P_F(x) - tz\|^2 = t^2\|z\|^2 - 2t + \|x - P_F(x)\|^2.$$

Ce polynôme en $t$ atteint son minimum ailleurs qu'à $t = 0$, donc $d(x, F) < d(x, P_F(x))$, une contradiction au choix de $P_F(x)$. Nous avons donc bien $x - P_F(x) \perp F$. Pour l'unicité, supposons que $x - y \perp F$ et $x - z \perp F$, où $y, z \in F$ (par exemple, on pourrait avoir $y = P_F(x)$). Alors $y - z \in F$, d'où $\langle x - y, y - z\rangle = \langle x - z, y - z\rangle = 0$. Une soustraction donne $\langle y - z, y - z\rangle = 0$, d'où $y - z = 0$ et $y = z$.

Le troisième point découle du deuxième, vu que $x - P_F(x) \perp P_F(x)$.

Pour (iv), on vérifie aisément que $(x+\lambda y)-(P_F(x)+\lambda P_F(y)) = (x-P_F(x))+\lambda(y-P_F(y)) \in F^\perp$, d'où $P_F(x) + \lambda P_F(y) = P_F(x + \lambda y)$ d'après (ii), et $P_F$ est linéaire. D'après (iii) nous avons $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$, donc $P_F$ est continu (de norme $\leq 1$).

Finalement, pour tout $x \in \mathcal{H}$ nous avons $x = (x - P_F(x)) + P_F(x)$, où $x - P_F(x) \in F^\perp$ et $P_F(x) \in F$, ce qui donne bien $F \oplus F^\perp = \mathcal{H}$. $\blacksquare_{3.2.2}$

**Corollaire 3.2.3.** *Pour tout sous-espace vectoriel fermé $F \subset \mathcal{H}$ on a $(F^\perp)^\perp = F$. En particulier, aussi l'orthogonale d'un sous-espace vectoriel non-fermé est fermé. En outre $F$ est dense dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

**Corollaire 3.2.4** (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit $\varphi\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique $y \in \mathcal{H}$ tel que pour tout $x$:*

$$\varphi(x) = \langle x, y\rangle.$$

*En outre, nous avons $\|\varphi\| = \|y\|$ où*

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)|\colon \|x\| \leq 1\}.$$

## 3.3 Bases orthonormales

**Définition 3.3.1.** Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est séparable s'il possède une suite de points, qui est dense dans $\mathcal{H}$.

*Exemple* 3.3.2. $L^2(\Omega)$.

**Définition 3.3.3.** Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. On appelle base orthonormale de $\mathcal{H}$ tout sous-ensemble fini ou dénombrable $\{e_n\}_n$ qui vérifie

(i) $\|e_n\| = 1$ et $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ si $n \neq m$,

(ii) le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_n\}_n$ (par combinaisons linéaires finies) est dense dans $\mathcal{H}$.

*Exemple* 3.3.4. $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ avec produit scalaire $\langle(\lambda_k)_k, (\mu_m)_m\rangle = \sum_k \lambda_k\overline{\mu_k}$ et $e_n$ la suite $(\delta_{nk})_k$.

*Exemple* 3.3.5. $\mathcal{H} = L^2([0, 2\pi])$ avec produit scalaire $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$ et $e_n$ la fonction $t \mapsto e^{int}$.

**Lemme 3.3.6.** *Soit $(e_i)_{i<n}$ une famille orthonormée et soit $F$ le sous-espace engendré (donc $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, mais on ne demande pas que $F$ soit dense). Alors pour tout $x$:*

$$P_{\bar{F}}(x) = \sum_{i<n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

**Théorème 3.3.7** (Existence des bases orthonormales)**.** *Tout espace de Hilbert séparable possède une base orthonormale.*

**Théorème 3.3.8.** *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale.*

(i) *Pour toute $(\lambda_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ la série $\sum_{n\geq 0} \lambda_n e_n$ converge dans $\mathcal{H}$ et sa somme $x = \sum_{n\geq 0} \lambda_n e_n$ vérifie*

$$\langle x, e_n\rangle = \lambda_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\lambda|^2.$$

(ii) *Pour tout $x \in \mathcal{H}$ la série $\sum_{n\geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2$ converge et*

$$x = \sum_n \langle x, e_n\rangle e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n\rangle|^2.$$

**Définition 3.3.9.** Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert. Une isométrie entre $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ est une application linéaire $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ qui satisfait $\forall x \in \mathcal{H}_1$: $\|U(x)\| = \|x\|$. $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont isomorphes s'il existe une isométrie bijective entre eux.

**Corollaire 3.3.10.** *Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie est isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$.*

**Proposition 3.3.11.** *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert (ou même de Banach). Soit $E \subseteq \mathcal{H}_1$ un sous espaces vectoriel dense (donc, non nécessairement complet). Soit $u\colon E \to \mathcal{H}_2$ une application linéaire, et supposons en outre qu'elle est continue (ce qui revient à l'existence d'une constante $C$ telle que pour tout $x \in E$: $\|u(x)\| \leq C\|x\|$).*

*Alors $u$ admet un unique prolongement en une application linéaire continue $\tilde{u}\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$.*

*Démonstration.* Soit $x \in \mathcal{H}_1$. Alors il existe une suite $(x_n) \subseteq E$ t.q. $x_n \to x$. Si $\tilde{u}$ existe elle doit satisfaire

$$\tilde{u}(x) = \lim u(x_n) \qquad \text{quand } x_n \to x \tag{3.1}$$

d'où son unicité. Il reste à démontrer que (3.1) définit en effet une application $\tilde{u}$ avec les propriétés désirées.

D'abord on vérifie que la limite existe toujours dans (3.1). En effet, $(x_n)$ est une suite de Cauchy, et

$$\|u(x_n) - u(x_m)\| = \|u(x_n - x_m)\| \leq C\|x_n - x_m\|.$$

Donc $(u(x_n))_n$ est également une suite de Cauchy et $\lim u(x_n)$ existe. Soit maintenant $(y_n) \subseteq E$ une autre suite telle que $y_n \to x$. Alors la suite $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$, que l'on noterait $(z_n)$, a aussi $x$ pour limite, donc $\lim u(z_n)$ existe et est égale à la limite de toute sous-suite:

$$\lim u(y_n) = \lim u(z_n) = \lim u(x_n).$$

En conséquence, $\lim u(x_n)$ ne dépend que de $x$ (et non du choix de la suite $(x_n)$), et (3.1) définit bien une application $\tilde{u}\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$.

Si $x \in E$ alors la suite constante $x_n = x$ tend vers $x$, d'où $\tilde{u}(x) = u(x)$. Aussi, si $(x_n), (y_n) \subseteq E$ et $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$ dans $\mathcal{H}_1$ alors

$$x_n + y_n \to x + y, \qquad \lambda x_n \to \lambda x, \qquad \|x_n\| \to \|x\|, \qquad \|u(x_n)\| \to \|u(x)\|,$$

d'où

$$u(x+y) = u(x) + u(y), \qquad u(\lambda x) = \lambda u(x), \qquad \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

$\blacksquare_{3.3.11}$

# Chapitre 4

# La transformation de Fourier

## 4.1 La transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$

**Définition 4.1.1.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle transformé de Fourier de $f$ la fonction $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx,$$

où $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ dans une base orthonormale pour $\mathbb{R}^n$.

**Lemme 4.1.2.** *$\hat{f}(\xi)$ est défini pour tout $\xi$ et $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$. En particulier, $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

*Démonstration.* Immédiat. $\blacksquare_{4.1.2}$

**Théorème 4.1.3** (Riemann-Lebesgue)**.** *Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$. L'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$, dite la transformation de Fourier, est linéaire et continue.*

*Démonstration.* La linéarité est immédiate. La continuité est une conséquence du théorème de continuité sous le signe de l'intégrale (Théorème 5.3.1) appliqué à la fonction $g(x,\xi) = e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x)$. Nous avons donc $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^n)$, et il reste à vérifier que $\hat{f}(\xi) \to 0$ quand $\xi \to \infty$.

Supposons d'abord que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors $f$ est intégrable, ainsi que ses dérivée partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Soit $M$ assez grand pour que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-M, M]^n$. Autrement dit, $f$ est nulle en dehors de $[-M, M]^n$, et par continuité, en dehors de $]-M, M[^n$. Fixons une direction $j$. Utilisant l'intégration par parties, nous calculons:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x)\, dx_j &= \int_{-M}^{M} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x)\, dx_j \\
&= -\frac{1}{2\pi i \xi_j} \int_{-M}^{M} f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx_j \\
&= -\frac{1}{2\pi i \xi_j} \left( [e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x)]_{x_j=-M}^{x_j=M} - \int_{-M}^{M} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i \xi_j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j,
\end{aligned}$$

d'où

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \left|\frac{1}{2\pi i\xi_j}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx\right| \leq \frac{\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\|_1}{2\pi\xi_j}.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, si $\|\xi\|_\infty > \max_j \frac{\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\|_1}{2\pi}$ alors $|\hat{f}(\xi)| < \varepsilon$.

Maintenant, traitons le cas général. Soit $\varepsilon > 0$. Par la densité des fonctions lisses à support compact il existe une fonction $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tell que $\|f - g\|_1 < \varepsilon/2$. Il en découle que $|\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| < \varepsilon/2$ pour tout $\xi$. Par le paragraphe précédent, si $\|\xi\|_\infty$ est assez grand alors $|\hat{g}(\xi)| < \varepsilon/2$ et $|\hat{f}(\xi)| < \varepsilon$. ■4.1.3

*Exemple* 4.1.4 (Transformée de Fourier de la Gaussienne). On a

$$\mathcal{F}(e^{-a\pi|x|^2})(\xi) = a^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi}{a}|\xi|^2},$$

où $|x| = \|x\|_2$.

*Démonstration.* Nous admettons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\,dt = 1.$$

La théorie des fonctions à une variable complexe nous permet d'en déduire que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+ic)^2}\,dt = 1$$

pour $c \in \mathbb{R}$, d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\pi(t+ic)^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

pour $c \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(e^{-a\pi|x|^2})(\xi) &= \int e^{-a\pi|x|^2}e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \\
&= \int e^{-a\pi\sum_j(x_j^2+2x_j\frac{i\xi_j}{a})}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\pi\sum_j\left((x_j+\frac{i\xi_j}{a})^2+\frac{\xi_j^2}{a^2}\right)}\,dx \\
&= e^{-\frac{\pi}{a}|\xi|^2}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\prod_j e^{-a\pi(x_j+\frac{i\xi_j}{a})^2}\Big)\,dx \\
&= e^{-\frac{\pi}{a}|\xi|^2}\prod_j\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-a\pi(x_j+\frac{i\xi_j}{a})^2}\,dx_j\Big) \\
&= a^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi}{a}|\xi|^2}.
\end{aligned}$$

■4.1.4

### 4.1.1 Transformation de Fourier et dérivation

**Théorème 4.1.5.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $x \mapsto x_j f(x)$ est intégrable. Alors $\hat{f}$ est de classe $C^1$ et*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} = -2\pi i \mathcal{F}\big(x_j f(x)\big).$$

*Démonstration.* Posons $g(x,\xi) = e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)$, et calculons:

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_j} = -2\pi i x_j e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x).$$

Cette dérivée partielle est continue pour tout $x$ et $\left|\frac{\partial g}{\partial \xi_j}\right| = 2\pi |x_j f(x)|$ est par hypothèse une fonction intégrable.

Les hypothèses du théorème de la dérivation sous le signe de l'intégrale (Théorème 5.3.2) sont donc vérifiées, et nous avons

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \int e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\, dx = -2\pi i \int e^{-2\pi i x\cdot\xi} x_j f(x)\, dx = -2\pi i \mathcal{F}(x_j f(x)). \qquad \blacksquare_{4.1.5}$$

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ nous écrivons

$$|\alpha| = \sum \alpha_j, \qquad x^\alpha = \prod x_j^{\alpha_j},$$

et si $f$ est de classe $C^{|\alpha|}$:

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f.$$

**Corollaire 4.1.6.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction t.q. $x \mapsto (1+|x|)^k f(x)$ est intégrable. Alors $\hat{f}$ est de classe $C^k$ et pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq k$:*

$$D^\alpha \hat{f}(\xi) = (-2\pi i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f) = \mathcal{F}\big((-2\pi i x)^\alpha f\big).$$

**Théorème 4.1.7.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $C^1$. On suppose que $f$ et la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \xi_j}$ sont intégrables. Alors*

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi).$$

*Démonstration.* Pour simplicité de notation nous considérons le cas $n = 1$. Fixons $M_1 < M_2$ réels positifs. Intégrant par parties:

$$\int_{M_1}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} \frac{df}{dx}(x)\, dx = e^{-2\pi i M_2 \xi} f(M_2) - e^{-2\pi i M_1 \xi} f(M_1) + 2\pi i \xi \int_{M_1}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} f(x)\, dx.$$

Comme $f$ et $\frac{df}{dx}$ sont intégrables, on obtient (e.g., par convergence dominée)

$$\lim_{M_1 \to -\infty} \int_{M_1}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} \frac{df}{dx}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} \frac{df}{dx}(x)\, dx,$$

$$\lim_{M_1 \to -\infty} \int_{M_1}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} f(x)\, dx.$$

Il en découle que $\lim_{M_1\to-\infty} e^{-2\pi i M_1\xi} f(M_1)$ existe, et comme $f$ est intégrable l'unique limite possible est zéro. Par le même raisonnement $\lim_{M_2\to\infty} e^{-2\pi i M_2\xi} f(M_2) = 0$, d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{df}{dx}\right)(\xi) &= \lim_{M_1\to-\infty, M_2\to\infty} \int_{M_1}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} \frac{df}{dx}(x)\,dx \\ &= \lim_{M_1\to-\infty, M_2\to\infty} 2\pi i\xi \int_{M_1}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} f(x)\,dx \\ &= 2\pi i\xi \hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

■4.1.7

**Corollaire 4.1.8.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $C^k$. On suppose que $f$ et toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $k$ sont intégrables. Alors on a $|\xi|^k\hat{f}(\xi) \in C_0(\mathbb{R}^n)$, i.e.,*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\xi|^k \hat{f}(\xi) = 0,$$

*et pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \le k$:*

$$\mathcal{F}\big(D^\alpha f\big) = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f} = (2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}.$$

### 4.1.2 Convolution sur $L^1$

D'après l'inégalité de Young (Théorème 2.4.5) le produit de convolution est bien défini sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1.$$

C'est un produit associatif et commutatif.

**Théorème 4.1.9.** *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors*

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}.$$

*Démonstration.* Par Fubini,

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}(f * g)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(y)g(x-y)\,dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} g(x-y)\,dx\right] e^{-2\pi i y\cdot\xi} f(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) e^{-2\pi i y\cdot\xi} f(y)\,dy \\ &= \hat{g}(\xi)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y\cdot\xi} f(y)\,dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

■4.1.9

### 4.1.3 Synthèse spectrale

La synthèse spectrale concerne l'inversion de la transformation de Fourier.

**Théorème 4.1.10.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et aussi $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors p.p.*

$$f = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))$$

*où*

$$\overline{\mathcal{F}}(g)(x) = \overline{\mathcal{F}(\overline{g})} = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi.$$

**Corollaire 4.1.11.** *La transformation de Fourier est injective.*

Mais l'image de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ n'est pas tout $C_0(\mathbb{R}^n)$.

## 4.2 La transformation de Fourier sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Le but est de restreindre la transformation de Fourier sur un domaine qu'elle préserve.

**Définition 4.2.1.** On appelle une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ à *décroissance rapide*, si elle est de classe $C^\infty$ et si pour tout $m \geq 1$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$(1+|x|^2)^m D^\alpha f(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ à décroissance rapide.

On a les inclusions

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n).$$

$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ (Théorème 2.5.7) et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C_0(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

**Théorème 4.2.2.** $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *En plus la restriction de la transformation de Fourier à* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *est un automorphisme d'espaces vectoriels.*

## 4.3 La transformation de Fourier-Plancherel sur $L^2(\mathbb{R}^n)$

Le but est de prolonger la transformation de Fourier (ou plutôt sa restriction à $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$) à $L^2(\mathbb{R}^n)$.

**Lemme 4.3.1.** *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. *Alors il existe une suite* $(f_n)_n$ *dans* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, *t.q.*

$$f_n \overset{\|\cdot\|_1}{\longrightarrow} f \quad \textit{et} \quad f_n \overset{\|\cdot\|_2}{\longrightarrow} f.$$

**Théorème 4.3.2.** *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. *Alors* $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *et on a*

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi.$$

*À compléter.* On démontre d'abord pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} \int |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi &= \int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)} \, d\xi \\ &= \int \left[ \int f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \, dx \right] \overline{\hat{f}(\xi)} \, d\xi \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Puisque $\hat{f}$ et $f$ sont toute les deux dans $L^1$, $\int\int |f(x)||\hat{f}(\xi)|\,dxd\xi < \infty$. Par le théorème de Fubini, nous avons donc droit aux manipulations suivantes:

$$\begin{aligned}
\ldots &= \int\int f(x)\overline{\hat{f}(\xi)}e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\,dxd\xi \\
&= \int\left[\int \overline{\hat{f}(\xi)}e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\,d\xi\right] f(x)\,dx \\
&= \int\overline{\left[\int \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\,d\xi\right]} f(x)\,dx \\
&= \int \overline{\overline{\mathcal{F}}(\hat{f})(x)} f(x)\,dx \\
&= \int \overline{f(x)} f(x)\,dx = \int |f(x)|^2\,dx
\end{aligned}$$

Puis on utilise le fait que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. $\blacksquare_{4.3.2}$

**Théorème 4.3.3** (Plancherel). *La restriction de la transformation du Fourier à $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ possède un unique prolongement continu*

$$\mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n).$$

*En outre, $\mathcal{P}$ est une isomorphisme isométrique, c.a.d. $\|\mathcal{P}(f)\|_2 = \|f\|_2$, dont l'inverse est donné par $\mathcal{P}^{-1}(f) = \overline{\mathcal{P}(\overline{f})}$.*

$\mathcal{P}$ est appelé la transformation de Fourier-Plancherel.

**Proposition 4.3.4.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Supposons que pour presque tout $\xi$*

$$\int_{|x|\leq R} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(\xi)$$

*(ceci définit $\varphi$ presque partout). Alors $\mathcal{P}(f) = \varphi$.*

# Chapitre 5

# Rappel sur les fonctions intégrables

Dans ce chapître sont rappelés les resultat principaux du cours "Calcul Intégrale" qui sont importants pour "Analyse Réelle".

## 5.1 Rappel sur l'intégrale de Lebesgue

On regarde un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

**Définition 5.1.1.** Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est *intégrable* (pour la mesure $\mu$) si elle est mesurable et

$$\int_\Omega |f(x)| d\mu(x) < \infty.$$

On va aussi écrire $\int_\Omega f d\mu$ ou $\int f$ pour $\int_\Omega f(x) d\mu(x)$.

**Rappel** Une fonction à valeur complexe est mesurable si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont mesurable. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est *mesurable* si les ensembles $f^{-1}(]-\infty, a]) = \{x \in \Omega : f(x) \leq a\}$ sont mesurables. (On n'a pas besoin de mesure pour cette définition!)

On défini l'intégrale d'une fonction étagée $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$, $a_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, $A_i \subset \Omega$ mesurable par

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

et celui d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ mesurable par

$$\int_\Omega f d\mu = \sup_{f \geq g, \text{ étagée}} \int_\Omega g d\mu.$$

Pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on décompose $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ avec $f_i : \Omega \to \mathbb{R}^+$ et on pose

$$\int f = \int f_1 - \int f_2 + i \int f_3 - i \int f_4.$$

**Lemme 5.1.2.** *$\int$ a des propriétés importantes suivantes:*

(i) *$\int$ est linéaire: si $f, g$ sont intégrables et $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$ alors $\int(\lambda f + \nu g) = \lambda \int f + \nu \int g$.*

(ii) *$\int$ préserve l'ordre: si $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ sont intégrables, $f \leq g$ $\mu$-p.p.* [1] *alors $\int f \leq \int g$. En particulier, si $f$ et $g$ coincident sur le complément d'un ensemble de mesure nulle alors $\int f = \int g$.*

(iii) *Si $f$ et intégrable alors $\left|\int f\right| \leq \int |f|$.*

## 5.2 Résultats d'intégration à connaître

Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ intégrables: $f_n \leq f_{n+1}$, $\mu$-p.p.. Alors on peut définir pour présque tout $x$,

$$f(x) = \lim_n f_n(x) = \sup_n f_n(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

**Théorème 5.2.1** (Beppo Levi (convergence monotone)). *Soit $(f_n)_n$ une suite* croissante *des fonctions $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ intégrables. On suppose que*

$$\sup_n \int f_n < \infty.$$

*Alors $f(x) = \lim_n f_n(x) = \sup_n f_n(x)$ existe et est finie $\mu$-p.p.. De plus $f$ est intégrable et $\int |f_n - f| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier*

$$\int f = \sup_n \int f_n.$$

**Théorème 5.2.2** (Lemme de Fatou). *Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ intégrables qui sont $\mu$-p.p.* positives. *Alors*

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

**Théorème 5.2.3** (Lebesgue (convergence dominée)). *Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ intégrables. On suppose que*

(i) *$f_n(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour $\mu$-p.t. $x \in \Omega$,*

(ii) *il existe une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}^+$ intégrable t.q. $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $n$ et $\mu$-p.t. $x \in \Omega$.*

*Alors $f$ est intégrable et $\int |f_n - f| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

### 5.2.1 Intégrales doubles

$(\Omega_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mu_2)$ sont deux espaces mesurés.

**Théorème 5.2.4** (Fubini). *Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure produit $\mu_1 \times \mu_2$. Alors:*

(i) *pour presque tout $x \in \Omega_1$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur $\Omega_2$ et la fonction (définie p.p.) $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ est intégrable sur $\Omega_1$,*

(ii) *pour presque tout $y \in \Omega_2$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur $\Omega_1$ et la fonction (définie p.p.) $y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x)$ est intégrable sur $\Omega_2$,*

1. Une propriété est vraie $\mu$-p.p. (ou $\mu$-p.t. $x$) si elle est vraie sur le complément d'un ensemble de mesure nulle.

(iii)

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)d(\mu_1\times\mu_2)(x,y) &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x)\\ &= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y).\end{aligned}$$

**Théorème 5.2.5** (Tonelli)**.** *Soit $f:\Omega_1\times\Omega_2\to\mathbb{C}$ une fonction* mesurable. *On suppose que la fonction $y\mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\Omega_2$ pour presque tout $x\in\Omega_1$ et que $\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}|f(x,y)|d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x)<\infty$. Alors $f:\Omega_1\times\Omega_2\to\mathbb{C}$ est intégrable par rapport à la mesure produit $\mu_1\times\mu_2$. En particulier le théorème de Fubini s'applique à $f$.*

### 5.2.2 Changement de variables

Soient $U$ et $V$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\phi:U\to V$ un difféomorphisme de classe $C^1$. Le déterminant de la matrice de Jacobi est

$$J_{ij}(x)=\frac{\partial\phi^j}{\partial x_i}(x).$$

**Théorème 5.2.6.** *Soient $U$ et $V$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\phi:U\to V$ un difféomorphisme de classe $C^1$. Soit $f:V\to\mathbb{C}$ une fonction. Alors $f$ est intégrable sur $V$ si et seulement si $f(\phi(x))|\det J(x)|$ est intégrable sur $U$ et sous ces conditions*

$$\int_V f(y)dy=\int_U f(\phi(x))|\det J(x)|dx.$$

## 5.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit $(\Omega,\mu)$ un espace mesuré et $\Lambda$ un espace metrique. On considère une fonction

$$f:\Omega\times\Lambda\to\mathbb{C}$$

et suppose que, pour tout paramètre $\lambda\in\Lambda$, la fonction $f_\lambda:\Omega\to\mathbb{C}$, $f_\lambda(x)=f(x,\lambda)$ est intégrable. On peut alors considerer la fonction $F:\Lambda\to\mathbb{C}$,

$$F(\lambda)=\int_\Omega f_\lambda(x)d\mu(x),$$

qui est définie par une intégrale dépendant d'un paramètre.

**Théorème 5.3.1** (Continuité sous le signe $\int$)**.** *Dans le cadre ci-dessus supposons que $\lambda_0\in\Lambda$ et*

(i) *pour presque tout $x\in\Omega$, la fonction $\lambda\mapsto f(x,\lambda)$ est continue en $\lambda_0$,*

(ii) *il existe un voisinage $V\subset\Lambda$ de $\lambda_0$ est une fonction intégrable $g:\Omega\to\mathbb{R}$ t.q. $|f(x,\lambda)|\le g(x)$ pour tout $\lambda\in V$ et presque tout $x\in\Omega$.*

*Alors $F(\lambda)$ est continue en $\lambda_0$.*

**Théorème 5.3.2** (Différentiation sous le signe $\int$)**.** *Dans le cadre ci-dessus supposons que $\Lambda$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que*

(i) *pour presque tout $x\in\Omega$, la fonction $\lambda\mapsto f(x,\lambda)$ admet des dérivées partielles $\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda_j}$ continues par rapport à $\lambda$,*

(ii) *il existe des fonctions intégrables* $h_j : \Omega \to \mathbb{R}$ *t.q.* $\left|\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda_j}\right| \leq h_j(x)$ *pour tout* $\lambda \in \Lambda$ *et presque tout* $x \in \Omega$.

*Alors* $F(\lambda)$ *admet des dérivés partielles* $\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda_j}$ *continues par rapport à* $\lambda$ *et on a*

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda_j} = \int_\Omega \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda_j} d\mu(x).$$