COURS DE LOGIQUE M2R AU SECONDE SEMESTRE
STRUCTURE MÉTRIQUES, STRUCTURES DÉPENDANTES ET MESURES

ITAÏ BEN YAACOV

Références : Poizat [Poi85]

1. Théories dépendantes

Nous fixons une théorie T dans un langage $\mathcal{L}$. Dans la notation $\varphi(x,y)$, x et y représentent des uplets de variables. Il serait des fois plus simple, bien que non indispensable, de supposer que T est une théorie complète. Tout se passe dans un modèle monstre (très saturé et très homogène) de T (qui pourrait varier si T n'est pas complète), qui sera toujours noté $\mathfrak{M}$. « Il existe » veux dire dans $\mathfrak{M}$, « modèle » est toujours un sous-modèle élémentaire de $\mathfrak{M}$, la satisfaction des formules est toujours dans le sens de $\mathfrak{M}$, et ainsi de suite.

Définition 1.1. Nous disons qu'une formule $\varphi(x,y)$ a la *propriété d'indépendance (IP)* si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe (dans un modèle monstre de T):
– des uplets a_i, $i < n$, de la longueur de x, et
– des uplets b_w pour tout $w \subseteq n = \{0, \ldots, n-1\}$, de la longueur de y,
tel que

$$\vDash \varphi(a_i, b_w) \qquad \Longleftrightarrow \qquad i \in w.$$

Une autre façon de le dire est la suivante. Posons

$$IP_{\varphi,k}(x_0, \ldots, x_{k-1}) = \bigwedge_{w \subseteq k} \left(\exists y \bigwedge_{i \in w} \varphi(x_i, y) \wedge \bigwedge_{i \notin w} \neg\varphi(x_i, y) \right).$$

Alors φ a l'IP si et seulement si $T \cup IP_{\varphi,k}$ est consistent pour k.

Définition 1.2. Si une formule φ n'a pas la propriété d'indépendance, nous disons qu'elle est *dépendante (ou NIP)*. Si soute formule est dépendante (i.e., si aucune formula n'a la propriété d'indépendance), nous disons que la théorie T est *dépendante (ou NIP)*.

Lemme 1.3 (Symétrie)**.** *Soit $\tilde{\varphi}(y,x) = \varphi(x,y)$. Alors φ est dépendante si et seulement si $\tilde{\varphi}$ l'est.*

Démonstration. Supposons que φ a l'IP. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $(a_j)_{j<2^n}$ et $(b_u)_{u \subseteq 2^n}$ tels que $\varphi(a_j, b_u) \Longleftrightarrow j \in u$. On énumère les parties de n: w_j, $j < 2^n$. Pour $i < n$, soit $u_i = \{j < 2^n : i \in w_j\}$. Alors $\tilde{\varphi}(b_{u_i}, a_{w_j}) \Longleftrightarrow i \in w_j$, et ceci pour tout $i < n$ et tout $w_j \subseteq n$. On en conclut que $\tilde{\varphi}$ a l'IP. Si $\tilde{\varphi}$ a l'IP, $\varphi = \tilde{\tilde{\varphi}}$ l'a aussi. $\blacksquare_{1.3}$

Au fait nous avons démontré que

$$\left(\exists x_0, \ldots x_{2^k-1} IP_{\varphi,2^k}\right) \to \left(\exists y_0, \ldots y_{k-1} IP_{\tilde{\varphi},k}\right).$$

Lemme 1.4. *Supposons que φ ait l'IP, et soit I un ensemble quelconque. Alors il existe un modèle de T, et dans ce modèle des uplets $\{a_i\}_{i \in I}$ et $\{b_w\}_{w \subseteq I}$ tel que pour tout $i \in I$ et $w \subseteq I$: $\varphi(a_i, b_w) \Longleftrightarrow i \in w$. Réciproquement, si une telle configuration existe dans un modèle de T, c'est que φ a l'IP.*

Révision 1040 *du* 24 février 2010.

Démonstration. Un sens est par compacité, l'autre est facile. $\blacksquare_{1.4}$

Rappel :

Définition 1.5. Définition d'une suite indiscernable.

Fait 1.6. *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une suite A-indiscernable. Alors toute sous-suite est A-indiscernable. Pour tout m, la suite obtenue en regroupant les m premiers uplet en un seul, puis les m suivants, et ainsi de suite, est A indiscernable. Si $b \in A$, alors la suite $(a_i)_i$ est aussi A-indiscernable.*

Définition 1.7. Par un *type global* nous voulons dire un type au-dessus du monstre: $p \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{M})$. Soit A un (petit) ensemble de paramètres. Nous disons qu'un type global p est *A-invariant* si pour toute formule $\varphi(x, y)$ ($|x| = n$) et tous deux paramètres b, c, si $b \equiv_A c$ alors $\varphi(x, b) \in p \Longleftrightarrow \varphi(x, c) \in p$.

Comme le modèle monstre est supposé très homogène, ceci est équivalent à $f(p) = p$ pour tout $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}/A)$. Ici, $f(p)$ est obtenu en laissant agir f sur les paramètres de p:

$$f(p) = \{\varphi(x, f(b)) \colon \varphi(x, b) \in p\}.$$

Proposition 1.8. *Soit $p \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{M})$ un type global, A-invariant pour un petit ensemble A. Nous construisons une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par récurrence, choisissant à l'étape i une réalisation quelconque a_i de la restriction $p{\restriction}_{A,\{a_j \colon j<i\}}$. Alors $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite A-indiscernable, dont le type au-dessus de A ne dépend que de p.*

Démonstration. Soient (a_i) et (b_i) deux suites construites de cette façon. Il suffirait de montrer que pour tout k, et pour tous $i_0 < \ldots < i_{k-1}$, et $j_0 < \ldots < j_{k-1}$:

$$a_{i_0}, \ldots, a_{i_{k-1}} \equiv_A b_{j_0}, \ldots, b_{j_{k-1}}.$$

Nous le démontrons par récurrence sur k. En effet, pour $k = 1$ nous avons $\mathrm{tp}(a_{i_0}/A) = \mathrm{tp}(b_{j_0}/A) = p{\restriction}_A$. Maintenant, supposons pour k et démontrons pour $k + 1$. Pour cela, considérons deux suites croissantes d'indices $i_0 < \ldots < i_k$ et $j_0 < \ldots < j_k$. Par hypothèse de récurrence

$$a_{i_0}, \ldots, a_{i_{k-1}} \equiv_A b_{j_0}, \ldots, b_{j_{k-1}}.$$

Considérons une formule de la forme $\varphi(x_0, \ldots, x_k, c)$, où $c \in A$. Alors :

$$a_{i_0}, \ldots, a_{i_{k-1}}, c \equiv_A b_{j_0}, \ldots, b_{j_{k-1}}, c,$$

d'où, par invariance:

$$\varphi(x, a_{i_0}, \ldots, a_{i_{k-1}}, c) \in p \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi(x, b_{j_0}, \ldots, b_{j_{k-1}}, c) \in p.$$

Par choix de a_{i_k} et de b_{j_k}:

$$\vDash \varphi(a_{i_k}, a_{i_0}, \ldots, a_{i_{k-1}}, c) \quad\Longleftrightarrow\quad \vDash \varphi(b_{j_k}, b_{j_0}, \ldots, b_{j_{k-1}}, c).$$

Puisque ceci est vrai pour toute formule $\varphi(x_0, \ldots, x_k, c)$ à paramètre $c \in A$, on conclut que

$$a_{i_0}, \ldots, a_{i_k} \equiv_A b_{j_0}, \ldots, b_{j_k}.$$

Ceci termine la preuve. $\blacksquare_{1.8}$

Définition 1.9. Soient $A \subseteq B$ deux ensembles. Un type $p \in \mathrm{S}_n(B)$ est dit *finiment réalisé* dans A si toute formule $\varphi(x, c) \in p$ admet une réalisation dans A.

Assez souvent, mais non toujours, le plus petit ensemble A serait un modèle. Notamment, tout type au-dessus d'un modèle $\mathcal{M}$ est finiment réalisé dans $\mathcal{M}$.

Lemme 1.10. *Soit $p \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{M})$ un type global, finiment réalisé dans un modèle A. Alors p est A-invariant.*

Démonstration. $\blacksquare_{1.10}$

Théorème 1.11. *Soit $\varphi(x,y)$ une formule. Alors φ a l'IP si et seulement s'il existe une suite indiscernable $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et un paramètre b tels que $\varphi(x,b)$ coupe la suite $(a_i)_i$ en deux parties co-finales. (I.e., tels que les ensembles $\{i\colon \varphi(a_i,b)\}$ et $\{i\colon \neg\varphi(a_i,b)\}$ sont non bornés dans $\mathbb{N}$.) Dans ce cas nous avons $\vDash IP_{\varphi,k}(a_0,\ldots,a_{k-1})$ pour tout k.*

Démonstration. **Droite à gauche (sens facile) :** Supposons qu'une telle suite et un tel paramètre existent dans un modèle $\mathcal{N}\vDash T$, que l'on peut supposer très homogène. Fixons k. Alors pour tout $w\subseteq k$ il existe une suite croissante d'indices $i_0\leq\ldots<i_k$ tels que $\varphi(a_{i_j},b)\iff j\in w$. Par indiscernibilité: $a_0,\ldots a_{k-1}\equiv a_{i_0},\ldots,a_{i_{k-1}}$. Il existe donc b_w tel que $a_0,\ldots a_{k-1},b_w\equiv a_{i_0},\ldots,a_{i_{k-1}},b$. En conséquence, $\varphi(a_i,b_w)\iff i\in w$ pour tout $i<k$. On obtient ainsi $\vDash IP_{\varphi,k}(a_0,\ldots,a_{k-1})$.

Gauche à droite (sens difficile) : D'après un lemme, il existe des familles infinies $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_w)_{w\subseteq\mathbb{N}}$ telles que $\varphi(a_i,b_w)\iff i\in w$. Fixons un ultrafiltre non principal $\mathscr{U}$ sur $\mathbb{N}$. Nous posons $p=\lim_{\mathscr{U}}\operatorname{tp}(a_i/\mathfrak{M})\in\mathrm{S}_n(\mathfrak{M})$. Plus précisément, pour une formule $\psi(x,c)$, à paramètre quelconque c:

$$\psi(x,c)\in p\iff\{i\colon\psi(a_i,c)\}\in\mathscr{U}.$$

Nous observons que toute conjonction finie de formules dans p est réalisé par au moins un des a_i (par une infinité, en fait). Il suit que p est consistent, complet (car $\psi(x,c)\in p$ ou $\neg\psi(x,c)\in p$), i.e., $p\in\mathrm{S}_n(\mathfrak{M})$ est un type global. En outre, il est finiment réalisé dans l'ensemble $A=\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Il est donc A-invariant.

Soit $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite A-indiscernable construite à partir de p, i.e., telle que $c_i\vDash p\restriction_{A,\{c_j\,:\,j<i}$.

On observe d'abord que tout les a_i sont distincts. Puisque $\mathscr{U}$ est non principal on a $x\neq c\in p$ pour tout c, et la suite $(c_i)_i$ est non constante. Puis, nous vérifions que si $\vDash\psi(c_0,c_1,\ldots,c_{k-1})$ pour une formule quelconque ψ, c'est qu'il existe $i_0,\ldots,i_{k-1}$ tels que $\vDash\psi(a_{i_0},\ldots,a_{i_{k-1}})$ aussi. En effet, si $\vDash\psi(c_0,c_1,\ldots,c_{k-1})$, c'est que $\psi(c_0,c_1,\ldots,c_{k-2},x)\in p$, et par définition de p il existe $a_{i_{k-1}}$ tel que $\psi(c_0,c_1,\ldots,c_{k-2},a_{i_{k-1}})$. Maintenant $\psi(c_0,c_1,\ldots,x,a_{k-1})\in p$, d'où $a_{i_{k-2}}$ tel que $\psi(c_0,c_1,\ldots,c_{k-3},a_{i_{k-2}},a_{i_{k-1}})$, et ainsi de suite. La contraposée est: si $\vDash\psi(a_{i_0},\ldots,a_{i_{k-1}})$ pour tous $i_0,\ldots,i_{k-1}\in\mathbb{N}$, c'est que $\vDash\psi(c_0,\ldots,c_{k-1})$.

Considérons maintenant la formule $\psi(x_0,\ldots,x_{k-1})=\left(\bigwedge_{i<j<k}x_i\neq x_j\right)\to IP_{\varphi,k}$. Alors on a en effet $\vDash\psi(a_{i_0},\ldots,a_{i_{k-1}})$, quel que soient les indices, et donc $\vDash\psi(c_0,\ldots,c_{k-1})$. Comme, en outre, les c_i sont distincts, $\vDash IP_{\varphi,k}(c_0,\ldots,c_{k-1})$, quel que soit k.

L'ensemble $\{\varphi(c_{2i},y)\wedge\neg\varphi(c_{2i+1},y)\}_i$ est donc finiment satisfaisable, et admet une réalisation d. Nous avons ainsi obtenu une suite indiscernable $(c_i)_i$ et d tel que $\{i\colon\varphi(c_i,d)\}$ (nombres pairs) et $\{i\colon\neg\varphi(c_i,d)\}$ (impairs) sont non bornés. $\blacksquare_{1.11}$

Lemme 1.12. *Supposons que toute formule de la forme $\varphi(x,y)$* **où** *$|y|=1$ est dépendante. Alors pour toute suite indiscernable $(a_i)_{i<|T|^+}$, où les a_i sont des uplets finis, et pour tout singleton b, la suite $(a_i)_i$ est indiscernable au dessus de b à partir d'un certain point.*

Démonstration. Considérons une formule $\varphi(x_0,\ldots,x_{k-1},y)$, où $|y|=1$. Nous prétendons qu'il existe $i_\varphi<|T|^+$ tel que, ou bien $\varphi(a_{i_0},\ldots,a_{i_{k-1}},b)$ est vrai pour tous $i_\varphi<i_0<\ldots<i_{k-1}<|T|^+$, ou bien c'est toujours faux. En effet, sinon on pourrait trouver des indices $i_0<i_1<\ldots$ pour $j\in\mathbb{N}$, tels que $\vDash\varphi(a_{i_{kj}},a_{i_{kj+1}},\ldots,a_{i_{kj+k-1}},b)$ ssi j est pair. Posant $c_j=a_{i_{kj}},a_{i_{kj+1}},\ldots,a_{i_{kj+k-1}}$, nous observons que la suite $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est indiscernable, et découpée en deux parties co-finales par la formule $\varphi(z,b)=\varphi(x_0x_1\ldots x_{k-1},b)$, ce qui contredit note hypothèse que $\varphi(z,y)$ est dépendante. Cette contradiction montre que $i_\varphi<|T|^+$ existe bien.

Maintenant, soit $\alpha=\sup\{i_\varphi\colon\varphi\}$, où φ varies sur toute les formules de cette forme. Alors $|\alpha|\leq\sum_\varphi|i_\varphi|\leq\sum_\varphi|T|=|T|^2=|T|$, d'où $\alpha<|T|^+$ également. Il découle du choix de α que la suite $(a_i)_{\alpha\leq i<|T|^+}$ est b-indiscernable. $\blacksquare_{1.12}$

Lemme 1.13. *Supposons que toute formule de la forme $\varphi(x,y)$* **où** *$|y|=1$ est dépendante. Alors pour toute suite indiscernable $(a_i)_{i<|T|^+}$, où les a_i sont des uplets finis, et pour tout uplet b, la suite $(a_i)_i$ est indiscernable au dessus de b à partir d'un certain point.*

Démonstration. On énumère $b = b_0, \dots, b_{k-1}$. D'après le lemme précédent, il existe $\alpha_0 < |T|^+$ tel que $(a_i)_{\alpha_0 \leq i < |T|^+}$ soit b_0-indiscernable. Cela revient à dire que la suite $(a_i b_0)_{\alpha_0 \leq i < |T|^+}$ est indiscernable, de longueur $|T|^+$. Il existe donc α_1 tel que $\alpha_0 \leq \alpha_1 < |T|^+$ tel que $(a_i b_0)_{\alpha_1 \leq i < |T|^+}$ soit b_1-indiscernable. Continuant de cette façon, nous trouvons $\alpha_{k-1} < |T|^+$ tel que la suite $(a_i b_0 b_1 \dots b_{k-1})_{\alpha_{k-1} \leq i < |T|^+}$ soit indiscernable. Autrement dit, $(a_i b)_{\alpha_{k-1} \leq i < |T|^+}$ est indiscernable, ou encore, $(a_i)_{\alpha_{k-1} \leq i < |T|^+}$ est indiscernable au dessus de b. $\blacksquare_{1.13}$

Théorème 1.14. *Pour qu'une théorie T soit dépendante (i.e., pour que toute formule soit dépendante), il suffit que toute formule $\varphi(x, y)$, où $|x| = 1$ soit dépendante.*

Démonstration. Supposons que T ne soit pas dépendante. Il existe donc dans un modèle de T une suite indiscernable d'uplets $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et une formule $\varphi(x, y)$ tel que $\vDash IP_{\varphi,k}(a_0, \dots, a_k)$ pour tout k. Par compacité, nous pouvons continuer cette suite (indiscernablement) en $(a_i)_{i<|T|^+}$, et pour tout $w \subseteq |T|^+$ trouver un uplet b tel que $\varphi(a_i, b) \iff i \in w$. Faisons-le pour w qui est cofinal en $|T|^+$, et dont le complémentaire est aussi cofinal, e.g., l'ensemble des ordinaux limite. Alors à partir d'aucun moment la suite $(a_i)_{i<|T|^+}$ n'est indiscernable au-dessus de b, il existe donc une formule $\psi(x, y)$, avec $|y| = 1$, qui n'est pas dépendante. Par symétrie, on en a autant avec $|x| = 1$. $\blacksquare_{1.14}$

2. Exemples

Proposition 2.1. *Toute théorie stable est dépendante.*

Démonstration. En effet, supposons que $\varphi(x, y)$ n'est pas dépendante. Alors, pour tout λ, nous pouvons construire un ensemble $A = \{a_i\}_{i \in \lambda}$ tel que, pour tout $w \subseteq \lambda$, il existe b_w tel que $\varphi(a_i, b_w) \iff i \in w$. Ceci donne au moins 2^λ types distincts sur λ paramètres, donc la théorie n'est pas stable (et plus précisément, c'est la même formule φ qui n'est pas stable). $\blacksquare_{2.1}$

Définition 2.2. Une structure $(M, <, \dots)$ est dite *o-minimale* si $<$ est un ordre total, dense, sans extrêmités, et si toute partie définissable de M (éventuellement avec paramètres) est une réunion finie d'intervalles ouverts ((a, b), $(-\infty, a)$ ou $(a, +\infty)$) et de points. [De façon équivalente : est définissable, sans quanteurs, avec seul le symbole $<$.]

Une théorie est dite *o*-minimale si tous ses modèles le sont.

C'est un théorème non trivial que si $\mathcal{M}$ est *o*-minimale, $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ l'est aussi (i.e., toute structure $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ l'est aussi). Si une théorie T élimine les quanteurs, il suffit de vérifier que tout ensemble définissable par une formule *atomique* est une réunion finie d'intervalles et de points. En effet, on vérifie aisément que toute combinaison booléenne d'ensembles de cette forme est aussi de cette forme.

Proposition 2.3. *Une théorie o-minimal est dépendante.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que toute formule $\varphi(x, y)$, où $|x| = 1$, est dépendante. En effet, soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite indiscernable dans $\mathfrak{M}$ (c.à.d., dans $\mathfrak{M}^1$!), et b quelconque. Alors $D = \varphi(\mathfrak{M}, b)$ est une réunion finie d'intervalles et de points. Puisque la suite $(a_i)_i$ est indiscernable, elle est en particulier croissante, décroissante ou constante. Dans chacun des cas, nous vérifions aisément qu'à partir d'un certain point, la suite reste entièrement dans D ou entièrement hors D. Ainsi, $\varphi(x, b)$ ne peut couper la suite en deux partie co-finales, et φ est donc dépendante. $\blacksquare_{2.3}$

Théorème 2.4. *La théorie des ordres denses sans extrêmités élimine les quanteurs dans le langage $\{<\}$. Elle est o-minimale et donc dépendante.*

Théorème 2.5. *La théorie ODAG des groupes abéliens divisibles ordonnées élimine les quanteurs dans le langage $\{<\}$. Elle est o-minimale et donc dépendante.*

Théorème 2.6. *La théorie RCF des corps algébriquement clos des ordres denses sans extrêmités élimine les quanteurs dans le langage $\{<\}$. Elle est o-minimale et donc dépendante.*

Théorème 2.7 (Sans preuve)**.** *Soit ACVF la théorie des corps valués algébriquement clos, dans le langage $\{0, 1, -, +, \cdot, |\}$, où $x|y$ signifie que $v(y/x) \geq 0$. Alors T élimine les quanteurs, et est dépendante.*

Dans un modèle $K \vDash ACVF$ nous pouvons interpréter le groupe de valeurs dans une sorte imaginaire : nous définissons $x \sim y$ si $x|y$ et $y|x$, et $\Gamma \cup \{\infty\} = K/\sim$. L'application quotient est la valuation, la multiplication sur K induit la loi d'addition sur Γ, et la relation $|$ sur K induit un ordre $\leq$ sur Γ. Ainsi, $(\Gamma, +, \leq)$ est un groupe abélien divisible ordonné, donc o-minimal. En particulier, T n'est pas stable.

3. Paramètres extérieurs

3.1. Rappels.

Définition 3.1. Un type $p(x) \in \mathrm{S}_n(M)$ est dit *définissable* si pour toute formule $\varphi(x, y)$ il existe une formule $\psi(y, c)$, notée aussi $d_{p(x)}\varphi(x, y)$ (où x est une variable liée !), appelée la φ-définition de p, satisfaisant:

$$\varphi(x, b) \in p \iff \vDash d_p\varphi(x, b), \qquad \forall b \in M.$$

De la même façon, un type sans quanteurs p est dit *définissable sans quanteurs* si pour toute formule sans quanteurs $\varphi(x, y)$ il existe une formule sans quanteurs $\psi(x, c) = d_p\varphi(x, y)$ qui sert de φ-définition de p.

Définition 3.2. Soit $A \supseteq M$, $p \in \mathrm{S}_n(M)$, $q \in \mathrm{S}_n(A)$ une extension de p. Alors q est dit *héritier* de p si pour toute formule $\varphi(x, a, b) \in q$ telle que $b \in M$ (et $a \in A$) il existe $a' \in M$ tel que $\varphi(x, a', b)$ appartient à p. Le type q est dit *co-héritier* de p s'il est finiment satisfaisable dans M.

Même chose pour un type sans quanteurs.

Proposition 3.3. *Soit $p \in \mathrm{S}_n(M)$ et $A \supseteq M$. Alors p admet au moins un héritier et un co-héritier dans $\mathrm{S}_n(A)$.*

Même chose pour types sans quanteurs.

Lemme 3.4. *Supposons que tous les types au-dessus de $\mathcal{M}$ sont définissables. Alors un type au-dessus de $\mathcal{M}$ admet un unique co-héritier à chaque $A \supseteq M$.*

Même chose pour type sans quanteurs et définissabilité sans quanteurs.

Ceci est fortement lié à :

Proposition 3.5. *Soit $p \in \mathrm{S}_n(M)$. Alors p est définissable si et seulement s'il admet un unique héritier dans $\mathrm{S}_n(A)$, pour tout A. Cet unique héritier est alors obtenu en appliquant la définition de p.*

Démonstration. Nous démontrerons uniquement la direction gauche à droite. En effet, supposons que $p \subseteq q \in \mathrm{S}_n(A)$ et que q ne suit pas la définition de p. Il existe donc une formule $\varphi(x, y)$ et $a \in A$ tels que $\varphi(x, a) \in q$ mais $\vDash \neg d_p\varphi(x, a)$. Soit $\psi(y, c) = d_p\varphi(x, a)$, où $c \in M$. Dans ce cas il existe dans q aussi la formule $\varphi(x, a) \wedge \neg\psi(a, c)$. Si q était héritier, on aurait $a' \in M$ tel que $\varphi(x, a') \wedge \neg\psi(a', c) \in p$. Alors d'un côté $\varphi(x, a') \in p$ et d'un autre $\vDash \neg d_p\varphi(x, a')$, une contradiction.

Or, nous savons qu'il existe au moins un héritier, c'est donc nécessairement le type obtenu en appliquant la définition à A.

(Pour l'autre sens - regarder Poizat [Poi85].) $\blacksquare_{3.5}$

Proposition 3.6. *Soit $p \in \mathrm{S}^{sq}_n(M)$ un type sans quanteurs, et supposons qu'il est aussi définissable sans quanteurs. Alors p admet un unique héritier (sans quanteurs) dans $\mathrm{S}^{sq}_n(A)$, pour tout A. Cet unique héritier est obtenu en appliquant la définition de p.*

Démonstration. Identique. $\blacksquare_{3.6}$

3.2. **Le théorème.** Soit $\mathcal{M}$ une structure dépendante, que l'on fixe pour la suite, dans un langage $\mathcal{L}$. Une partie $X \subseteq M^n$ est appelée *extérieurement définissable* s'il existe une extension $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$, et une formule $\varphi(x, c)$, avec un paramètre $c \in N^m$ (donc extérieur à $\mathcal{M}$) tel que

$$X = \varphi(M^n, c) = \{a \in M^n : \vDash \varphi(a, c)\}.$$

Nous définissons une expansion $\mathcal{M}^*$ de $\mathcal{M}$, nommant par un nouveau prédicat chaque partie extérieurement définissable de $\mathcal{M}$.

Remarque 3.7. Si $\mathcal{M}$ est stable alors tout $X \subseteq M^n$ extérieurement définissable est aussi définissable dans $\mathcal{M}$. En effet, soit $X = \varphi(M^n, c)$, et soit $p(y) = \mathrm{tp}(c/M)$. Soit $\psi(x, d) = d_{p(y)}\varphi(x, y)$. Alors $X = \psi(M^n, d)$. Autrement dit, $\mathcal{M}^*$ est une expansion définissable de $\mathcal{M}$.

Par contre, tout ensemble définissable de $\mathcal{M}$ est définissable sans quanteurs dans $\mathcal{M}^*$ (même sans hypothèse de stabilité). Il en découle que $\mathcal{M}^*$ élimine les quanteurs.

Nous allons démontrer

Théorème 3.8 (Théorème des paramètres extérieurs de Shelah)**.** *Si $\mathcal{M}$ est une structure dépendante alors $\mathcal{M}^*$ élimine les quanteurs.*

La preuve que nous donnerons est due à Pillay. Il est facile à voir que si $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ est $|M|^+$-saturé alors toute partie extérieurement définissable de $\mathcal{M}$ est définissable avec un paramètre dans $\mathcal{N}$. Nous fixons donc un tel $\mathcal{N}$, et $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{R_{\varphi(x,c)}\}_{\varphi(x,c)\in\mathcal{L}(N)}$. Alors $\mathcal{M}^*$ peut être vu comme une $\mathcal{L}^*$-structure, interprétant $R_{\varphi(x,c)}$ par $\varphi(M, c)$. Cette vision de $\mathcal{M}^*$ nous permet de lui construire une extension élémentaire particulière comme suit.

Nous posons $\mathcal{L}_P = \mathcal{L} \cup \{P\}$, où P est un nouveau prédicat unaire, et considérons la paire $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ comme une $\mathcal{L}_P$-expansion $\hat{\mathcal{N}}$ de $\mathcal{N}$, où $P^{\hat{\mathcal{N}}} = M$. Soit $\hat{\mathcal{N}}_1 \succeq_{\mathcal{L}_P} \hat{\mathcal{N}}$ une extension élémentaire très saturée. Alors $\hat{\mathcal{N}}_1$ est encore de la forme $(\mathcal{N}_1, \mathcal{M}_1)$, où $M_1 = P^{\hat{\mathcal{N}}_1}$, et nous avons: $\mathcal{M} \preceq \mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{N}_1$, $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N} \preceq \mathcal{N}_1$ (formant un carré). En outre, puisque $\mathcal{N} \preceq \mathcal{N}_1$, une formule $\varphi(x, c) \in \mathcal{L}(N)$ a aussi un sens dans $\mathcal{N}_1$, et nous pouvons donc définir

$$R_{\varphi(x,c)}^{\mathcal{M}_1^*} = \varphi(M_1, c).$$

Ceci définit une $\mathcal{L}^*$-structure $\mathcal{M}_1^*$, expansion de $\mathcal{M}_1$. Nous remarquons que les ensembles $R_{\varphi(x,c)}^{\mathcal{M}^*}$ et $R_{\varphi(x,c)}^{\mathcal{M}_1^*}$ sont définissables dans $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ et $(\mathcal{N}_1, \mathcal{M}_1)$, respectivement, par la même formule : $\varphi(x, c) \wedge P(x)$. Puisque $(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \preceq_{\mathcal{L}_P} (\mathcal{N}_1, \mathcal{M}_1)$, il en découle que $\mathcal{M}^* \preceq_{\mathcal{L}^*} \mathcal{M}_1^*$.

Finalement, comme la structure $\mathcal{M}_1^*$ est définissable dans $(\mathcal{N}_1, \mathcal{M}_1)$, et comme cette dernière est supposée très saturée (au moins $|\mathcal{L}(N)|^+$-saturée), $\mathcal{M}_1^*$ l'est aussi. On vérifie d'ailleurs aisément que la saturation de $(\mathcal{N}_1, \mathcal{M}_1)$ implique celle de $\mathcal{N}_1$ et de $\mathcal{M}_1$.

Lemme 3.9.
(i) *Toute $\mathcal{L}(M)$-formule est équivalente dans $\mathcal{M}^*$ à une formule atomique de la forme $R_{\varphi(x,c)}(x)$ (sans paramètres).*
(ii) *Toute $\mathcal{L}^*(M)$-formule sans quanteurs est équivalente dans $\mathcal{M}^*$ à une formule atomique de la forme $R_{\varphi(x,c)}(x)$ (sans paramètres).*
(iii) *Tout $\mathcal{L}^*$-type sans quanteurs au-dessus de $\mathcal{M}^*$ est définissable sans quanteurs.*

Démonstration. Le premier énoncé est immédiat. Pour le deuxième, on considère d'abord les $\mathcal{L}^*(M)$-formules atomiques (deux cas, une $\mathcal{L}(M)$-formule atomique et une formule de la forme $R_{\varphi(x,y,c)}(x, b)$, $b \in M$), puis on remonte à toute les formule sans quanteurs.

Reste à démontrer que tout $\mathcal{L}^*$-type sans quanteurs $p \in \mathrm{S}_x^{sq}(\mathcal{M}^*)$ est définissable sans quanteurs. D'après ce qui précède, il suffit de montrer qu'il admet une $R_{\varphi(x,y,c)}$-définition pour chaque formule de cette forme. Pour ce faire, nous prenons une réalisation $a \vDash p$ dans $\mathcal{M}_1^*$, qui existe par saturation.

Maintenant nous profitons du fait que $c \in N$ et $a \in M_1$ appartiennent tous les deux à N_1. Puisque $\mathcal{N}$ est supposé suffisamment saturé, il existe $a'c' \in N$ tels que $a'c' \equiv_M ac$, dans le sens de $\mathcal{L}$. Nous avons alors pour tout $b \in M$:

$$R_{\varphi(x,y,c)}(x,b) \in p \Longleftrightarrow \varphi(a,b,c) \Longleftrightarrow \varphi(a',b,c') \Longleftrightarrow R_{\varphi(a',y,c')}(b).$$

On conclut que $R_{\varphi(a',y,c')}(y)$ est la $R_{\varphi(x,y,c)}$-définition recherchée. $\blacksquare_{3.9}$

Notons $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$, $T^* = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}^*}(\mathcal{M}^*)$.

Lemme 3.10. *Pour que T^* élimine les quanteurs il suffit que pour toute formule atomique $R_{\varphi(x,y,c)}$, la formule $\exists y\, R_{\varphi(x,y,c)}$ soit équivalente modulo T^* à une formule sans quanteurs.*

Démonstration. Supposons que la condition est vraie. Puisque toute formule sans quanteurs $\psi(x,y)$ est équivalente modulo T^* à une formule de la forme $R_{\varphi(x,y,c)}$, on en déduit que $\exists y\, \psi(x,y)$ est équivalente à une formule sans quanteurs. Par un argument par récurrence, toute formule est équivalente à une formule sans quanteurs. $\blacksquare_{3.10}$

(Ici il suffit de restreindre au cas $|y| = 1$.)

Lemme 3.11. *Pour que T^* élimine les quanteurs, il suffit que pour tout type sans quanteurs $p(x) \in \mathrm{S}_n^{sq}(\mathcal{M}^*)$ et toute formule $\exists y\, R_{\varphi(x,y,c)}$, ou bien $p(x) \vdash \exists y\, R_{\varphi(x,y,c)}(x,y)$, ou bien $p(x) \vdash \neg\exists y\, R_{\varphi(x,y,c)}(x,y)$ (modulo le diagramme élémentaire de $\mathcal{M}^*$).*

Démonstration. C'est un fait général que cette condition implique que $\exists y\, R_{\varphi(x,y,c)}(x,y)$ soit équivalente dans $\mathcal{M}^*$ à une formule sans quanteurs de $\mathcal{L}^*(\mathcal{M})$. Dans notre cas, cela implique encore qu'elle soit équivalente à une $\mathcal{L}^*$-formule sans quanteurs et sans paramètres (et même atomique). $\blacksquare_{3.11}$

Supposons maintenant que T^* n'élimine pas les quanteurs. Il existe donc un type sans quanteurs $p(x) \in \mathrm{S}_x^{sq}(\mathcal{M}^*)$ qui n'implique ni $\exists y\, R_{\chi(x,y,c)}(x,y)$ ni sa négation. À partir de maintenant nous écrirons $R(x,y) = R_{\chi(x,y,c)}$.

Donc, d'un côté, $p(x) \cup \{\exists y\, R(x,y)\}$ est cohérent, d'où $p(x) \cup \{R(x,y)\}$ l'est. Il existe donc un type sans quanteurs $p_1(x,y) \in \mathrm{S}_{x,y}^{sq}(\mathcal{M}^*)$ qui contient $p(x) \cup \{R(x,y)\}$. Soit $q_1(x,y) \in \mathrm{S}_{x,y}^{sq}(\mathcal{M}_1^*)$ sont unique co-héritier.

D'un autre côté, $p(x) \cup \{\neg\exists y\, R(x,y)\}$ est cohérent. Il s'étend donc en un type $p_2(x) \in \mathrm{S}_x(\mathcal{M}^*)$ (avec quanteurs, et donc, non nécessairement définissable). Soit $q_2(x) \in \mathrm{S}_x(\mathcal{M}_1^*)$ un co-héritier quelconque de p_2 (il faut choisir).

Aussi, soit $q(x) \in \mathrm{S}_n^{sq}(\mathcal{M}_1^*)$ l'unique co-héritier de $p(x)$. Alors $q(x) \subseteq q_1(x,y)$ et $q(x) \subseteq q_2(x)$.

Petit passage dans $\mathcal{L}$: Nous observons qu'un $\mathcal{L}^*$-type (avec ou sans quanteurs) au-dessus de $\mathcal{M}_1^*$ détermine un $\mathcal{L}$-type complet, avec quanteurs, au-dessus de $\mathcal{M}_1$:

$$\varphi(x,d) \in q(x)\restriction_{\mathcal{L}} \quad\Longleftrightarrow\quad R_{\varphi(x,y)}(x,d) \in q(x),$$

et pareil pour $q_1(x,y)$ et $q_2(x)$. Nous observons alors que :

(i) $q_2(x)\restriction_{\mathcal{L}} = q(x)\restriction_{\mathcal{L}} \subseteq q_1(x,y)\restriction_{\mathcal{L}}$.

(ii) En conséquence, pour chaque $\mathcal{L}(M_1)$-formule $\varphi(x,y,c)$ dans $q_1(x,y)\restriction_{\mathcal{L}}$, la formule $\exists y\, \varphi(x,y,c)$ appartient à $q_2(x)\restriction_{\mathcal{L}}$. Le type $q_2'(x,y) = q_2(x) \cup q_1(x,y)\restriction_{\mathcal{L}}$, qui est un $\mathcal{L}^*$-type incomplet, est donc cohérent.

(iii) Le $\mathcal{L}$-type $q_1(x,y)\restriction_{\mathcal{L}}$ est co-héritier de sa restriction à M, i.e., finiment réalisé dans M. Il est donc M-invariant.

Dans $\mathcal{M}_1^*$, nous construisons par récurrence une suite $(a_ib_i)_{i\in\mathbb{N}}$: pour i pair, a_i, b_i réalisent $q_1(x,y)\restriction_{M,\{a_jb_j\}_{j<i}}$, et pour i impair, ils réalisent $q_2'(x,y)\restriction_{M,\{a_jb_j\}_{j<i}}$. Alors :

(i) Pour i pair, nous avons $\mathcal{M}_1^* \vDash R_{\varphi(x,y,c)}(a_i,b_i)$, donc $\mathcal{N}_1 \vDash \varphi(a_i,b_i,c)$.

(ii) Pour i impair, nous avons $\mathcal{M}_1^* \models \neg\exists y\, R_{\varphi(x,y,c)}(a_i, y)$, donc $\mathcal{N}_1 \models \neg\varphi(a_i, b_i, c)$.

(iii) Pour tout i, $a_i b_i$ réalisent $q_1(x,y)\restriction_{\mathcal{L}}\restriction_{M,\{a_j b_j\}_{j<i}}$. La suite $(a_i, b_i)_i$ est donc M-indiscernable dans $\mathcal{M}_1$ (i.e., au sens du langage $\mathcal{L}$).

Nous avons ainsi trouvé un modèle $\mathcal{N}_1 \models T$, dans ce modèle une suite indiscernable $(a_i b_i)_i$, et une formule $\varphi(xy, c) \in \mathcal{L}(N)$ qui coupe la suite en deux parties co-finales. La formule $\varphi(xy, z)$ a donc l'IP, et T aussi. Donc, si T est dépendante, c'est que T^* doit éliminer les quanteurs, et le théorème est démontré.

Corollaire 3.12. *Si T est dépendante alors T^* l'est aussi.*

Démonstration. Sinon il y a une $\mathcal{L}^*$-formule $\psi(x, y)$ qui n'est pas dépendante, qui a l'IP. Par élimination des quanteurs ψ est équivalente modulo T^* à une $\mathcal{L}^*$-formule sans quanteurs, et donc à une formule de la forme $R_{\varphi(x,y,c)}$, $c \in N$. Puisque $\mathcal{M}_1^*$ est un modèle assez saturé, on peut trouver dans M_1 une suite $\mathcal{L}^*$-indiscernable $(a_n)_n$ et b tel que

$$\mathcal{M}_1^* \models R_{\varphi(x,y,c)}(a_n, b) \iff n \text{ est pair.}$$

La suite est en particulier $\mathcal{L}$-indiscernable dans $\mathcal{N}_1$ et

$$\mathcal{N}_1 \models \varphi(a_n, b, c) \iff n \text{ est pair.}$$

Donc la $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x, yz)$ n'est pas dépendante, une contradiction. $\blacksquare_{3.12}$

4. Division, déviation et invariance

4.1. **Rappels.**

Définition 4.1. Une formule $\varphi(x, b)$ *divise* (anglais : divides) au-dessus d'un ensemble A s'il existe une suite A-indiscernable $(b_n)_n$ dans $\mathrm{tp}(b/A)$ tel que l'ensemble $\{\varphi(x, b_n)\}_n$ est contradictoire. Il existe alors k tel que la conjonction de toutes k formule de cet ensemble est contradictoire, on dit alors que $\varphi(x, b)$ k-divise au-dessus de A.

Une formule $\varphi(x, b)$ *dévie* (anglais : forks) au-dessus d'un ensemble A si elle implique une disjonction de formules (éventuellement avec d'autres paramètres) dont chacune divise au-dessus de A.

Soit $B \supseteq A$ et $p \in \mathrm{S}_x(B)$. Alors p divise (respectivement, dévie) au-dessus de A s'il contient une formule qui divise (respectivement, dévie) au-dessus de A.

Nous considérons qu'une formule qui divise définit un ensemble qui est très « petit ». Une réunion finie d'ensembles petits devrait elle aussi être considéré petite, d'où la notion de déviation. Il est facile à vérifier que (*) si $\varphi(x, b)$ implique une disjonction de formules qui *dévient* (mais non nécessairement divisent) au-dessus de A alors $\varphi(x, b)$ dévie elle aussi au-dessus de A.

Lemme 4.2. *Soit $B \supseteq A$ et $p \in \mathrm{S}_x(B)$. Alors sont équivalents:*

(i) *Le type p ne dévie pas au-dessus de A.*

(ii) *Le type p admet une extension globale $p \in \mathrm{S}_x(\mathfrak{M})$ qui ne dévie pas au-dessus de A.*

(iii) *Pour chaque $C \supseteq B$, p admet une extension $q \in \mathrm{S}_x(C)$ qui ne divise pas au-dessus de A.*

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Considérons

$$\Sigma(x) = p(x) \cup \{\neg\varphi(x, c) \colon \varphi(x, c) \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}) \text{ qui dévie au-dessus de } A\ \}.$$

D'après (*) l'ensemble Σ est consistent, et tout type global qui le contient ne dévie pas au-dessus de A.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Clair.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons que $\varphi(x, b) \in p$ dévie au-dessus de A, disons $\varphi(x, b) \vdash \bigvee_{i<\ell} \psi_i(x, c_i)$ où chaque $\psi_i(x, c_i)$ divise au-dessus de A. Soit $C = B \cup \{c_i\}_{i<\ell}$. Alors toute extension de p à C contient l'une des $\psi_i(x, c_i)$, et divise en conséquence au-dessus de A. $\blacksquare_{4.2}$

Lemme 4.3. *Soit A un ensemble, $\mathcal{M} \supseteq A$ un modèle $|A|^+$-saturé (p.e., le monstre). Alors un type $p \in \mathrm{S}_x(M)$ ne dévie pas au-dessus de A si et seulement s'il ne divise pas au-dessus de A.*

Démonstration. Nous avons déjà observé que la non déviation implique la non division. Pour l'autre sens, supposons que $p \in \mathrm{S}_x(M)$ dévie au-dessus de A, donc il existe une formule $\varphi(x, b) \in p$ qui dévie. En d'autres mots, nous avons $\varphi(x, b) \vdash \bigvee_{i<\ell} \psi_i(x, c_i)$ où chaque $\psi_i(x, c_i)$ divise au-dessus de A. Le problème est que les c_i n'appartiennent pas nécessairement à M. Par contre, par saturation, il existe $c'_0, \ldots, c'_{\ell-1} \in M$ tel que $c'_0, \ldots, c'_{\ell-1} \equiv_{Ab} c_0, \ldots, c_{\ell-1}$. Alors d'un côté nous avons toujours $\varphi(x, b) \vdash \bigvee_{i<\ell} \psi_i(x, c'_i)$, et d'un autre $\varphi_i(c'_i)$ divise aussi au-dessus de A. Maintenant, l'un des $\psi_i(x, c'_i)$ doit appartenir à p, qui divise en conséquence au-dessus de A. $\blacksquare_{4.3}$

4.2. **Division et invariance.**

Lemme 4.4. *Soit $p \in \mathrm{S}_x(\mathfrak{M})$ un type global, A-invariant. Alors p ne dévie pas au-dessus de A.*

Démonstration. En effet, il suffirait de montrer que p ne divise pas au-dessus de A, ce qui revient à démontrer que toute formule $\varphi(x, b) \in p$ ne divise pas au-dessus de A. En effet, soit $(b_n)_n$ une suite A-indiscernable dans $\mathrm{tp}(b/a)$. Alors, $b_n \equiv_A b$ implique que $\varphi(x, b_n) \in p$, d'où la consistance de l'ensemble $\{\varphi(x, b_n)\}_n$. $\blacksquare_{4.4}$

Le réciproque n'est pas vrai en général, même pour une théorie dépendante, car la notion d'une type A-invariant est trop forte (sauf si A est un modèle, nous le verrons plus tard). Il nous faut donc la notion plus faible suivante :

Définition 4.5. Un type global $p \in \mathrm{S}_x(\mathfrak{M})$ est *Lascar A-invariant* si pour tout $b, c \in M$, s'il existe une suite A-indiscernable infinie qui commence par $b, c, c_2, c_3, \ldots$ alors $\varphi(x, b) \leftrightarrow \varphi(x, c) \in p$.

(Un tel type est aussi appelé des fois en anglais « non strongly splitting », mais c'est affreux !)

Nous remarquerons que si $b, c, c_2, c_3, \ldots$ est une suite A-indiscernable alors en particulier $b \equiv_A c$. Donc tout type A-invariant est Lascar A-invariant, mais la réciproque est fausse. Être Lascar invariant, bien que plus faible, suffit pour la non déviation.

Lemme 4.6. *Soit $p \in \mathrm{S}_x(\mathfrak{M})$ un type global, A-invariant. Alors p ne dévie pas au-dessus de A.*

Démonstration. Nous commençons comme avant, nous avons donc une formule $\varphi(x, b) \in p$ et une suite A-indiscernable $(b_n)_n$, et nous avons à démontrer que l'ensemble $\{\varphi(x, b_n)\}_n$ est consistent. Par homogénéité du modèle monstre, nous pouvons supposer que $b = b_0$. Alors $b_0, b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots$ est A-indiscernable, d'où $\varphi(x, b_n) \in p$ pour tout n. Nous concluons comme avant. $\blacksquare_{4.6}$

Si la théorie est dépendante, la réciproque est vraie également :

Proposition 4.7. *Soit T dépendante, $\mathfrak{M}$ le modèle monstre, $p \in \mathrm{S}_x(\mathfrak{M})$ un type global, $A \subseteq \mathfrak{M}$ un (petit) ensemble. Alors sont équivalents :*

(i) *p ne dévie pas au-dessus de A.*

(ii) *p ne divise pas au-dessus de A.*

(iii) *p est Lascar invariant au-dessus de A.*

Démonstration. Il ne reste à démontrer qu'un type qui ne divise pas est Lascar invariant. Supposons donc que p n'est pas Lascar A-invariant : nous avons des formules $\varphi(x, b) \wedge \neg\varphi(x, c) \in p$ et une suite A-indiscernable $b, c, c_2, c_3, \ldots$. Notons $\psi(x, yz) = \varphi(x, y) \wedge \neg\varphi(x, z)$, et $d_0 = bc$, $d_n = c_{2n}c_{2n+1}$. Alors $\varphi(x, d_0) \in p$ et $(d_n)_n$ est une suite A-indiscernable. De plus, l'ensemble $\{\psi(x, d_n)\}_n$ ne peut être consistent. En effet, supposons qu'un a existait tel que $\vDash \psi(a, d_n)$ pour tout n. C'est alors que $\vDash \varphi(a, c_n)$ ssi n est pair, ce qui contredit la dépendance de T.

La suite A-indiscernable $(d_n)_n$ et la formule $\psi(x, d_0) \in p$ témoignent alors que p divise au-dessus de A. $\blacksquare_{4.7}$

La différence entre la définition d'un type global *A-invariant* et *Lascar A-invariant* est qu'on a remplacé la condition (*) « $b \equiv_A c$ » par la condition plus forte (**) « b, c commencent une suite A-indiscernable. » La condition (*) est une relation d'équivalence entre b et c. La condition (**) est réflexive (pourquoi ?), symétrique (pourquoi ?) mais non nécessairement transitive. La *clôture transitive* de (**) est donc une relation d'équivalence qui s'appelle le *type (fort) de Lascar*. Plus précisément,

Définition 4.8. Soient a et b deux uplets de la même longueur, A un ensemble. Alors $d_A^L(a,b) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est le plus petit entier n tel qu'il existe une suite $a_0, a_1, \ldots, a_n$ avec $a = a_0$, $b = a_n$, et pour chaque $i < n$ il existe une suite A-indiscernable qui commence par $a_i, a_{i+1}, \ldots$. Si un tel n n'existe pas alors $d_A^L(a,b) = \infty$.

Si $d_A^L(a,b) < \infty$ nous disons que a et b ont le même *type fort de Lascar* (ou type de Lascar) au dessus de A: $a \equiv_A^L b$.

Nous voyons donc que la relation $d_A^L(b,c) \leq 1$ est la condition (**), la relation $d_A^L(b,c) \leq n$ est son n-itéré, et $d_A^L(b,c) < \infty$, i.e., $b \equiv_A^L c$, est sa clôture transitive.

Remarque 4.9. Si $b \equiv_A^L c$ alors $b \equiv_A c$. Le type de Lascar est donc plus « fort » que le type ordinaire.

Remarque 4.10. Un type global $p \in \mathrm{S}_c(\mathfrak{M})$ est Lascar A-invariant si et seulement si, chaque fois que $b \equiv_A^L c$ nous avons $\varphi(x,b) \leftrightarrow \varphi(x,c) \in p$.

Lemme 4.11. *Au dessus d'un modèle $\mathcal{M}$, le type de Lascar coïncide avec le type ordinaire:*

$$b \equiv_M^L c \quad \Longleftrightarrow \quad b \equiv_M c.$$

Démonstration. Les sens $\Longrightarrow$ est connu déjà. Pour $\Longleftarrow$, soit $p(x) = \mathrm{tp}(b/M) = \mathrm{tp}(c/M)$. Soit $q \in \mathrm{S}_x(\mathfrak{M})$ un co-héritier global. Alors q est M-invariant. Nous construisons $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $b_i \models q{\restriction}_{M,b,c,\{b_j\}_{j<i}}$. Puisque q est M-invariant et chacun de b, c réalise $q{\restriction}_M$ $(= p)$, les suites $b, b_0, b_1, \ldots$ et $c, b_0, b_1, \ldots$ sont M-indiscernables. On en déduit que $d_M^L(b,c) \leq 2$ et en particulier $b \equiv_M^L c$. $\blacksquare_{4.11}$

Nous en obtenons:

Lemme 4.12. *Soit $\mathcal{M}$ un modèle. Un type global $p \in \mathrm{S}_x(\mathfrak{M})$ est M-invariant si et seulement s'il est Lascar M-invariant.*

Proposition 4.13. *Soit T dépendante, $\mathfrak{M}$ le modèle monstre, $p \in \mathrm{S}_x(\mathfrak{M})$ un type global, $\mathcal{M} \preceq \mathfrak{M}$ un (petit) modèle. Alors sont équivalents :*

(i) *p ne dévie pas au-dessus de A.*
(ii) *p ne divise pas au-dessus de A.*
(iii) *p est invariant au-dessus de M.*

Définition 4.14. Un automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ est dit *fort au-dessus de A* s'il s'exprime comme composition d'automorphismes dont chacun fixe un modèle contenant A. L'ensemble des automorphismes forts au-dessus de A est noté $\mathrm{Autf}(\mathfrak{M}/A)$ [aussi dans les texte anglophones].

Lemme 4.15. *Soit A un ensemble, b et c deux uplets. Alors $b \equiv_A^L c$ si et seulement si il existe un automorphisme fort $f \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{M}/A)$ qui envoie b à c.*

Démonstration. Supposons d'abord que $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}/M)$ et $\mathcal{M} \supseteq A$ est un modèle. Alors $b \equiv_M f(b)$ d'où $b \equiv_M^L f(b)$ et a fortiori $b \equiv_A^L f(b)$. Puisque la relation $\equiv_A^L$ est transitive, le même est vrai quand f est une composition de tels automorphismes, c'est-à-dire quand $f \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{M}/A)$.

Pour la réciproque, supposons que $b \equiv_A^L c$, et montrons qu'il existe $f \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{M}/A)$ tel que $f(b) = c$. Puisque $\mathrm{Autf}(\mathfrak{M}/A)$ est clos pour la composition, il suffirait de considérer le cas où $d_A^L(b,c) \leq 1$. Soit $\mathcal{M} \supseteq A$ un petit modèle contenant A. Il existe donc une suite A-indiscernable $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $b_0 = b$, $b_1 = c$, que l'on peut continuer autant que l'on veut, par exemple en $(b_i)_{i<\lambda}$ où $\lambda = (2^{|M|+|\mathcal{L}|})^+$. Puisque λ est plus grand que le nombre de types au-dessus de M, il existe $i < j < \lambda$ tels que $b_i \equiv_M b_j$. Or $b_i b_j \equiv_A bc$: il existe donc un modèle $\mathcal{M}' \supseteq A$ tel que $b \equiv_{M'} c$. Il existe donc $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}/M') \subseteq \mathrm{Autf}(\mathfrak{M}/A)$ qui envoie b à c. $\blacksquare_{4.15}$

Lemme 4.16. *Soit $p(x)$ un type global, A un ensemble. Pour que p soit Lascar A-invariant il faut et il suffit que p soit fixé par tout $f \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{M}/A)$.*

Démonstration. Immédiat. $\blacksquare_{4.16}$

4.3. **Définition faible et définition borélienne.** Soit $p \in \mathrm{S}_x(\mathfrak{M})$ un type global, disons A-invariant. Alors p admet toujours une *définition faible* au-dessus de A de la forme suivante: pour chaque formule $\varphi(x, y)$ (x reste fixe, y varie avec la formule) nous posons

$$D_p\varphi = \{\mathrm{tp}(b/A) \colon \varphi(x, b) \in p\} \subseteq \mathrm{S}_y(A).$$

Alors, puisque p est invariant, on peut le récupérer à partir de cette définition faible $(D_p\varphi)_{\varphi(x,y)\in\mathcal{L}}$:

$$p = \{\varphi(x, b) \colon \varphi(x, y) \in \mathcal{L} \text{ et } \mathrm{tp}(b/A) \in D_p\varphi\}. \tag{1}$$

Nous pouvons appliquer (1) à tout ensemble de paramètres $B \supseteq A$, même plus grand que $\mathfrak{M}$, obtenant un type A-invariant noté $p{\restriction}_B$.

Définition 4.17. Soient $p(x)$ et $q(y)$ deux types globaux A-invariants. Dans une extension propre de $\mathfrak{M}$, soit $a \vDash p$ et $b \vDash q{\restriction}_{\mathfrak{M},a}$. Nous définissons $p(x) \otimes q(y)$ comme étant $\mathrm{tp}(a, b/\mathfrak{M})$.

Lemme 4.18. *Soient p, q et $p \otimes q$ comme plus haut. Alors:*

(i) *Soit $B \supseteq A$ (dans $\mathfrak{M}$), $a \vDash p{\restriction}_B$, $b \vDash q{\restriction}_{Ba}$. Alors $\mathrm{tp}(a, b/B) = (p \otimes q){\restriction}_B$.*

(ii) *Le type $p \otimes q$ ne dépend pas des choix faits dans la construction.*

(iii) *Le type $p \otimes q$ lui aussi est A-invariant.*

(iv) *L'opération $\otimes$ est associative (mais non symétrique, en général).*

(v) *Posons*

$$p^{(n)}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = p(x_0) \otimes \ldots \otimes p(x_{n-1}), \qquad p^{(\omega)}(x_0, x_1, \ldots) = p(x_0) \otimes p(x_1) \otimes \ldots = \bigcup_n p^{(n)}.$$

Alors pour tout $A \supseteq M$, le type $p^{(\omega)}{\restriction}_A$ est le type de la suite A-indiscernable construite à partie de p: $a_0 \vDash p{\restriction}_A$, ... , $a_i \vDash p{\restriction}_{A,a_0,\ldots,a_{i-1}}$, ...

Pour être entièrement précis, on aurait dû écrire $p \otimes_A q$, car la construction de $p \otimes q$ utilise la définition faible au-dessus de A. Mais il découle du Lemme que si $A' \supseteq A$, et p, q sont des types A-invariants (donc aussi A'-invariants), le produits libres $p \otimes_A q$ et $p \otimes_{A'} q$ coïncident, justifiant la notation $\otimes$. Même chose pour $p^{(n)}$ et $p^{(\omega)}$.

Par la suite nous dirons qu'un type global est *invariant* s'il est invariant au-dessus d'un petit ensemble. Si p et q sont tous deux invariants, au-dessus de B et de C respectivement, alors ils sont $(B \cup C)$-invariants et $p \otimes q$, $p^{(n)}$, $p^{(\omega)}$ sont définis sans ambiguïté comme plus haut.

Lemme 4.19. *Un type A-invariant p est définissable dans le sens classique si et seulement s'il est définissable au-dessus de A, si et seulement si pour chaque $\varphi(x, y)$ l'ensemble $D_p\varphi$ est un ouvert-fermé de $\mathrm{S}_y(A)$, à savoir, l'ouvert-fermé défini par la formule $d_{p(x)}\varphi(x, y)$:*

$$D_p\varphi = [d_{p(x)}\varphi(x, y)] = \big\{r(y) \in \mathrm{S}_y(A) \colon d_{p(x)}\varphi(x, y) \in r(y)\big\}.$$

Ceci est toujours le cas quand T est stable.

Lemme 4.20. *Soit $\varphi(x,y)$ une formule dépendante, et soit N tel que $IP_{\varphi,N+1}(x_0,\ldots,x_{N-1})$ contredit T. Alors pour toute suite indiscernable $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et tout b, la suite de valeurs de vérité $\{\varphi(a_i,b)\}_i \in \{V,F\}$ ne peut changer de valeur qu'au plus $2N$ fois.*

Démonstration. Comme dans la preuve de la caractérisation des formules dépendantes par la non coupure d'une suite indiscernable en deux parties co-finales. $\blacksquare_{4.20}$

Définition 4.21. Soit $\varphi(x,y)$ une formule dépendante. Le plus petit N qui vérifie la conclusion du lemme est appelé le *nombre d'alternances de* φ, noté N_φ.

Lemme 4.22. *(T dépendante.) Soit $p(x) \in \mathrm{S}_x(\mathfrak{M})$ un type global A-invariant et soit $\varphi(x,b)$ une formule. Soit n le plus grand tel que*

$(*_n)$ *il existe* $(a_i)_{i\le n} \vDash p^{(n+1)}$ *tel que* $\vDash \varphi(a_i,b) \leftrightarrow \neg\varphi(a_{i+1},b)$.

(Nous avons $n \le 2N_\varphi$!) Alors pour une telle suite maximale: $\varphi(x,b)\in p$ si et seulement si $\vDash \varphi(a_n,b)$.

Démonstration. Soit $a_{n+1} \vDash p{\restriction}_{A,b,a_0,\ldots,a_n}$, donc $(a_i)_{i\le n+1} \vDash p^{(n+2)}$. Par maximalité de n nous avons nécessairement: $\vDash \varphi(a_n,b) \leftrightarrow \varphi(a_{n+1},b)$. Or, par construction, $\varphi(x,b)\in p \iff \vDash \varphi(a_{n+1},b)$. $\blacksquare_{4.22}$

Définition 4.23. Nous disons qu'un type global A-invariant $p(x)$ admet une *définition borélienne* si pour toute formule $\varphi(x,y)$, l'ensemble $D_p\varphi$ est un borélien de $\mathrm{S}_y(A)$.

Proposition 4.24. *(T dépendante.) Soit $p(x)\in \mathrm{S}_x(\mathfrak{M})$ un type global A-invariant. Alors p admet une définition borélienne au-dessus de A: en fait, chaque $D_p\varphi$ est une combinaisons booléenne finie de fermés.*

Démonstration. Fixons $\varphi(x,y)$. Nous observons alors que

$$X^n = \left\{ \mathrm{tp}(b/A) \colon \exists \bar{x} \left(\bar{x} \vDash p^{(n+1)}{\restriction}_A \wedge \bigwedge_{i<n} \vDash \varphi(x_i,b) \leftrightarrow \neg\varphi(x_{i+1},b) \right) \right\},$$

$$Y^n = \left\{ \mathrm{tp}(b/A) \colon \exists \bar{x} \left(\bar{x} \vDash p^{(n+1)}{\restriction}_A \wedge \varphi(x_n,b) \wedge \bigwedge_{i<n} \vDash \varphi(x_i,b) \leftrightarrow \neg\varphi(x_{i+1},b) \right) \right\}$$

sont des fermés, et que $D_p\varphi = \bigcup_{n\le 2N_\varphi} (Y^n \smallsetminus X^{n+1})$. $\blacksquare_{4.24}$

Corollaire 4.25. *Soit T une théorie quelconque. Alors sons équivalents:*

- *T est dépendante.*
- *Pour tout ensemble A et tout type $p\in \mathrm{S}_x(A)$, p admet au plus $2^{|A|+|\mathcal{L}|}$ extensions globales non déviantes au-dessus de A.*
- *Pour tout ensemble A et tout type $p\in \mathrm{S}_x(A)$, p admet au plus $2^{|A|+|\mathcal{L}|}$ extensions globales A-invariantes.*
- *Pour tout modèle $\mathcal{M}$ et tout type $p \in \mathrm{S}_x(M)$, p admet au plus $2^{|M|+|\mathcal{L}|}$ cohéritiers globaux.*

Dans le cas contraire, pour tout $\lambda \ge |\mathcal{L}|$ il existe un modèle $\mathcal{M}$ de taille λ et $p\in \mathrm{S}_x(M)$ qui admets 2^{2^λ} cohéritiers globaux.

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Choisissons un modèle $\mathcal{M}\supseteq A$ de taille $|A|+|\mathcal{L}|$. Soit q une extension globale non déviante de p. Alors q ne dévie pas non plus au-dessus de M. Il est donc M-invariant, puisque T est dépendante. L'espace $\mathrm{S}_y(M)$ admet une base d'ouverts de taille $|M|$ (les ouvert-fermés) donc au plus $2^{|M|}$ fermés, et au plus $2^{|M|}$ possibilités pour $D_p\varphi$. Cela donne au plus $2^{|M|\times|\mathcal{L}|} = 2^{|M|}$ possibilités pour q.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Puisque toute extension A-invariante ne dévie pas au-dessus de A.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). Puisqu'un cohéritier est invariant.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Il suffit de démontrer le « dans le cas contraire. » Ceci est fait dans Poizat [Poi85, Théorème 12.28]. $\blacksquare_{4.25}$

Lemme 4.26. *Soit $p \in \mathrm{S}_x(\mathfrak{M})$ Lascar A-invariant. Alors p est invariant et $p^{(n)}$, $p^{(\omega)}$ sont eux aussi Lascar A-invariant.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M} \supseteq A$ un petit modèle. Alors p est M-invariant, donc invariant. Si $f \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{M})$ alors $f(p) = p$. Par unicité de la construction de $p^{(n)}$ nous avons donc $f(p^{(n)}) = (f(p))^{(n)} = p^{(n)}$. On raisonne de la même façon pour $p^{(\omega)}$. Cela conclut la preuve. $\blacksquare_{4.26}$

Proposition 4.27. *(T dépendante) Soit A un ensemble quelconque, $p(x) \in \mathrm{S}_x(A)$ un type qui ne dévie pas au-dessus de A. Si $b \vDash p$ et $b \equiv^L_A c$, c'est que $d^L_A(b, c) \leq 2$.*

Démonstration. Puisque p ne dévie pas au-dessus de A, c'est qu'il admet une extension globale q non déviante au-dessus de A. Fixons un petit modèle $\mathcal{M} \supseteq A$, et $b' \vDash q\restriction_M$. Alors il existe un automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}/A)$ tel que $f(b') = b$. remplaçant q par $f(q)$ et $\mathcal{M}$ par $f(\mathcal{M})$, nous pouvons en outre supposer que $b \vDash q\restriction_M$. Réalisons par récurrence $b_i \vDash q\restriction_{M,c,b,b_0,\dots,b_{i-1}}$. Alors $b, b_0, b_1, \dots$ est une suite M-indiscernable, réalisant $q^{(\omega)}\restriction_M$. C'est en particulier une suite A-indiscernable.

Supposons maintenant que $\vDash \varphi(b, b_0, \dots, b_{k-1}, a)$, où $a \in A$. Par construction $b_0, \dots, b_{k-1} \vDash q^{(k)}\restriction_{A,b,c}$. Or $q^{(k)}$ est Lascar A-invariant et $ba \equiv^L_A ca$ (car tout $f \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{M}/A)$ qui envoie b à c fixe A est en particulier a). Il en découle que $\vDash \varphi(c, b_0, \dots, b_{k-1}, a)$.

Nous avons démontré que les suites $b, b_0, b_1, \dots$ et $c, b_0, b_1, \dots$ ont le même type au-dessus de A. Comme l'une est A-indiscernable l'autre l'est aussi, d'où $d^L_A(b, c) \leq 2$ (en passant par b_0). $\blacksquare_{4.27}$

5. Types génériquement stables

Définition 5.1. Nous disons qu'un type global est *finiment réalisé* s'il est finiment réalisé dans un petit modèle (et donc dans tout modèle qui le contient).

Un type global p est dit *génériquement stable* s'il est définissable et finiment réalisé.

Si p est génériquement stable, disons finiment réalisé dans $\mathcal{M}$, alors p est M-invariant et donc M-définissable.

Lemme 5.2. *Soit p un type génériquement stable, et soit q un type global finiment réalisé. Alors $p(x) \otimes q(y) = q(y) \otimes p(x)$, et ce type est finiment réalisé.*

Démonstration. Nous choisissons $\mathcal{M}$ assez grand tel que p et q sont finiment réalisés dans M. Soit $p_0 = p\restriction_M$. Puisque p est M-définissable, c'est l'unique héritier de p_0 par Proposition 3.5. Aussi, q est un cohéritier de $q_0 = q\restriction_M$.

Soit $B \supseteq M$ quelconque. Soit $a \vDash p\restriction_B$, $b \vDash q\restriction_{Ma}$. Alors $ab \vDash [p(x) \otimes q(y)]\restriction_B$. Puisque q est cohéritier de q_0, c'est que $\mathrm{tp}(b/Ma)$ est cohéritier de $\mathrm{tp}(b/M)$. De façon équivalente, $\mathrm{tp}(a/Mb)$ est héritier de $\mathrm{tp}(a/M) = p_0$. Or p_0 admet un unique héritier, c'est que $a \vDash p\restriction_{Mb}$. Donc $ab \vDash [q(y) \otimes p(x)]\restriction_B$.

Ceci montre que $p(x) \otimes q(y) = q(y) \otimes p(x)$. Maintenant supposons que la formule $\varphi(x, y, c)$ appartient à ce type. Répétant la construction plus haut avec $c \in B$ nous avons $\vDash \varphi(a, b, c)$, d'où $\vDash d_{p(x)}\varphi(x, b, c)$. Alors $d_{p(x)}\varphi(x, y, c) \in q(y)$, qui est finiment réalisé dans M, il existe donc $b' \in M$ tel que $\vDash d_{p(x)}\varphi(x, b', c)$. Par conséquence, $\varphi(x, b', c) \in p$, qui lui est aussi finiment réalisé dans M. Il existe donc $a' \in M$ tel que $\vDash \varphi(a', b', c)$, et la preuve est complète. $\blacksquare_{5.2}$

Lemme 5.3. *Soit p un type génériquement stable. Alors toute réalisation de $p^{(\omega)}\restriction_B$ est totalement indiscernable au-dessus de B.*

Démonstration. Il suffit de montrer pour chaque n que pour toute permutation σ de n, $p^{(n)}(x_0,\ldots,x_{n-1}) = p^{(n)}(x_{\sigma(0)},\ldots,x_{\sigma(n-1)})$. Pour démontrer ceci il suffi de considérer des permutations de la forme $\sigma = (ii+1)$. Or $p^{(2)}(x,y) = p^{(2)}(y,x)$ d'après le Lemme précédent, d'où

$$\begin{aligned} p^{(n)}(x_0,\ldots,x_{n-1}) &= p^{(i)}(x_0,\ldots,x_i) \otimes p^{(2)}(x_i,x_{i+1}) \otimes p^{(n-i-2)}(x_{i+2},\ldots,x_{n-1}) \\ &= p^{(i)}(x_0,\ldots,x_i) \otimes p^{(2)}(x_{i+1},x_i) \otimes p^{(n-i-2)}(x_{i+2},\ldots,x_{n-1}) \\ &= p^{(n)}(x_{\sigma(0)},\ldots,x_{\sigma(n-1)}). \end{aligned}$$ $\blacksquare_{5.3}$

Lemme 5.4. *Soit $(a_n)_n$ une suite totalement indiscernable et soit $\varphi(x,y)$ une formule dépendante, disons avec un nombre d'alternances N_φ. Alors pour chaque b, la suite $\{\varphi(a_n,b)\} \subseteq \{V,F\}$ est constante, à au plus N_φ exceptions près.*

Démonstration. Sinon il existe $i_0 < i_1 < \ldots < i_N$, où $N = N_\varphi$, tels que $\vDash \varphi(a_{i_\ell},b)$ et $j_0 < j_1 < \ldots < j_N$ tels que $\vDash \neg\varphi(a_{j_\ell},b)$. Soit $k > \max(i_N,j_N)$. Puisque la suite est totalement indiscernable, la suite $(a'_n) = a_{i_0},a_{j_0},a_{i_1},a_{j_1},\ldots,a_{i_N},a_{j_N},a_k,a_{k+1},\ldots$ est elle aussi indiscernable, mais $\{\varphi(a'_n,b)\}$ change de valeur au moins $2N+1$ fois, ce qui contredit le choix de $N = N_\varphi$. $\blacksquare_{5.4}$

Pour une formule $\varphi(x,y)$ et $N \in \mathbb{N}$, écrivons

$$\tilde\varphi_N(y,x_0,\ldots,x_{2N}) = \bigvee_{w\in[2N+1]^{N+1}} \bigwedge_{i\in w} \varphi(x_i,y),$$

où $[2N+1]^{N+1} = \{w \subseteq 2N+1 \colon |w| = N+1\}$. Nous observerons que $\tilde\varphi(y,\bar x)$ est vraie si et seulement si une majorité (au moins $N+1$ parmi $2N+1$) de $\varphi(x_0,y)$, …, $\varphi(x_{2N},y)$ sont vraies.

Lemme 5.5. *(T dépendante.) Soit p un type global A-invariant et supposons qu'une réalisation de $p^{(\omega)}\restriction_A$ est totalement indiscernable au-dessus de A. Alors p est définissable. Plus exactement, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle réalisation. Alors pour toute formule $\varphi(x,y)$ il existe N tel que pour tout b:*

$$\varphi(x,b) \in p \quad\Longleftrightarrow\quad \vDash \tilde\varphi_N(b,a_0,\ldots,a_{2N}).$$

En plus, nous pouvons toujours prendre $N = N_\varphi$, le nombre d'alternances de φ.

Démonstration. En effet, posons $N = N_\varphi$ et $a'_i = a_i$ pour $i \leq 2N$. Pour $i > 2N$, nous réalisons comme d'habitude $a'_i \vDash p\restriction_{A,a'_0,\ldots,a'_{i-1},b}$. Alors la suite $(a'_n)_n$ elle aussi réalise $p^{(\omega)}\restriction_A$.

Si $\varphi(x,b) \in p$, c'est que $\vDash \varphi(a'_i,b)$ pour tout $i > 2N$. Donc $\vDash \varphi(a'_i,b)$ pour tout i, sauf au plus N exceptions, d'où $\vDash \tilde\varphi_N(b,a_0,\ldots,a_{2N})$. Si $\neg\varphi(x,b) \in p$, le même raisonnement montre qu'au plus N parmi $\varphi(a'_i,b)$ sont vrais, d'où $\vDash \neg\tilde\varphi_N(b,a_0,\ldots,a_{2N})$. $\blacksquare_{5.5}$

Lemme 5.6. *Soit p un type global A-invariant vérifiant la conclusion du Lemme précédent (sans le « en plus » qui n'a pas de sens si T n'est pas dépendante). Alors p est A-définissable et finiment réalisable dans chaque modèle contenant A. En particulier, p est génériquement stable.*

Démonstration. Puisque p est définissable et A-invariant, il est nécessairement A-définissable. Fixons maintenant une formule $\varphi(x,y)$ et le N qui correspond. Soit aussi $\mathcal{M}$ un petit modèle contenant A. Nous savons que

$$\mathfrak{M} \vDash \exists\bar x\forall y[d_{p(x)}\varphi(x,y) \leftrightarrow \tilde\varphi_N(y,\bar x)].$$

C'est une formule au-dessus de A (car la définition $d_p\varphi$ est au-dessus de A, le reste sans paramètres). Elle est donc au-dessus de $\mathcal{M}$. Par conséquence il existe $\bar a \in M^{2N+1}$ tels que

$$\mathcal{M} \vDash \forall y[d_{p(x)}\varphi(x,y) \leftrightarrow \tilde\varphi_N(y,\bar a)].$$

D'où:

$$\mathfrak{M} \vDash \forall y[d_{p(x)}\varphi(x,y) \leftrightarrow \tilde{\varphi}_N(y,\bar{a})].$$

En particulier, si $\varphi(x,b) \in p$, c'est que $\varphi(a_i,b)$ pour au moins un a_i (en fait, au moins $N+1$ d'entre eux). $\blacksquare_{5.6}$

Nous avons démontré

Théorème 5.7. *(T dépendante.) Soit p un type global A-invariant. Alors sont équivalents:*

(i) *p est génériquement stable : définissable et finiment réalisé dans un modèle.*
(ii) *Pour tout ensemble B, toute réalisation de $p^{(\omega)}\restriction_B$ est totalement indiscernable.*
(iii) *Toute réalisation de $p^{(\omega)}\restriction_A$ est totalement indiscernable.*
(iv) *p est définissable, et $d_p\varphi(x,y) = \tilde{\varphi}_{N_\varphi}(y,a_0,\ldots,a_{2N_\varphi})$ pour toute formule $\varphi(x,y)$ et toute réalisation (a_n) de $p^{(\omega)}\restriction_A$.*
(v) *p est définissable et finiment réalisable dans tout modèle contenant A.*

Corollaire 5.8. *Une théorie T est stable si et seulement si tout type (global) est génériquement stable.*

Démonstration. Supposons que T est stable, donc en particulier dépendante, et soit p un type global. Alors p est définissable, et A l'ensemble des paramètres pour la définition. Alors p est A-invariant. Aussi puisque toute suite indiscernable dans une théorie stable l'est totalement (sinon on obtiendrait la propriété de l'ordre), toute réalisation de $p^{(\omega)}\restriction_A$ est totalement indiscernable. p est donc génériquement stable.

Réciproquement, supposons que tout type global est génériquement stable. Soit $\mathcal{M}$ un modèle quelconque, et $p \in \mathrm{tp}_n(M)$. Soit q un cohéritier global. Alors q est M-invariant, et par hypothèse il est génériquement stable. Il est donc en particulier définissable, donc M-définissable, ce qui montre que p est définissable. Si tout type au-dessus d'un modèle est définissable c'est que T est stable. $\blacksquare_{5.8}$

Corollaire 5.9. *(T dépendante.) Soit p un type global invariant. Alors sont équivalents:*

(i) *p est génériquement stable.*
(ii) *$p(x) \otimes q(y) = q(y) \otimes p(x)$ pour tout type invariant q. (On dirait que p* commute *avec tout type invariant.)*
(iii) *p commute avec lui-même: $p^{(2)}(x,y) = p(x) \otimes p(y) = p(y) \otimes p(x) = p^{(2)}(y,x)$.*

Démonstration. En effet, supposons d'abord que p est génériquement stable. Soit A un ensemble tel que p et q sont tous deux A-invariants. Il suffirait alors de montrer que $p \otimes q\restriction_A = q \otimes p\restriction_A$ pour tout tel A. Choisissons $(a_n)_n \vDash p^{(\omega)}\restriction_A$, $b \vDash q\restriction_{A,(a_n)_n}$ et $c \vDash p\restriction_{Ab}$. Donc, en particulier, $a_n, b \vDash p \otimes q\restriction_A$ et $b, c \vDash q \otimes p\restriction_A$.

Supposons que $\varphi(x,y,d) \in p(x) \otimes q(y)\restriction_A$, où $d \in A$. Dans ce cas nous avons $\vDash \varphi(a_n,b,d)$ pour tout n, d'où, par la « définition par majorité, » $\vDash d_p\varphi(x,b,d)$. Par conséquence $\vDash \varphi(c,b,d)$, i.e., $\varphi(x,y,d) \in q(y) \otimes p(x)\restriction_A$. On conclut que $p \otimes q\restriction_A = q \otimes p\restriction_A$.

Réciproquement, supposons que p commute avec lui même. Il en découle que toute réalisation de $p^{(\omega)}\restriction_A$ est totalement A-indiscernable, et p est donc génériquement stable. $\blacksquare_{5.9}$

Lemme 5.10. *Soit p un type global A-invariant. Si a et b réalisent $p\restriction_A$, alors $a \equiv^L_A b$ (i.e., p détermine un type de Lascar au-dessus de A).*

Démonstration. En effet, soit (c_n) une réalisation de $p^{(\omega)}\restriction_{A,a,b}$. Alors $a, c_0, c_1, \ldots$ et $b, c_0, c_1, \ldots$ sont A-indiscernables, d'où $a \equiv^L_A b$. $\blacksquare_{5.10}$

Lemme 5.11. *Soient $p(x)$, $q(x)$ et $r(y)$ trois type invariants, tel que p est A-invariant, $p\restriction_A = q\restriction_A$, et r est Lascar A-invariant. Alors $p \otimes r\restriction_A = q \otimes r\restriction_A$.*

Démonstration. Soit $B \supseteq A$ assez grand pour que p, q et r soient tous B-invariants. Soit $a \vDash p{\restriction}_B$, $b \vDash q{\restriction}_B$ et $c \vDash r{\restriction}_{Bab}$. Alors il suffit de montrer que $ac \equiv_A bc$. En effet, chacun de a et b réalise $p{\restriction}_A$ par hypothèse, et puisque p est A-invariant nous avons $a \equiv^L_A b$. Puisque q est Lascar A-invariant, $ac \equiv_A bc$. $\blacksquare_{5.11}$

Lemme 5.12. *(T dépendante.) Soit $I = (a_n)_n$ use suite indiscernable quelconque, et posons*

$$q(x) = \{\varphi(x,b)\colon \vDash \varphi(a_n,b) \text{ pour tout } n \text{ suffisamment grand}\}.$$

Alors q est un type global complet, finiment réalisable dans la suite I (et donc I-invariant). Il est notée $\mathrm{Av}(I/\mathfrak{M})$*, le* type moyen *de la suite I.*

Démonstration. Puisque la suite est indiscernable et T dépendante, chaque formule $\varphi(x,b)$ est soit vraie pour tout n assez grand, soit fausse pour tout n assez grand, donc ou bien $\varphi(x,b) \in q$ ou bien $\neg\varphi(x,b) \in q$. Il est clair que q est clos pour conjonction, et que chaque formule de q est réalisé dans la suite I, d'où l'énoncé. $\blacksquare_{5.12}$

Proposition 5.13. *(T dépendante) Soit p un type global A-invariant. Alors p est génériquement stable si et seulement si pour tout $B \supseteq A$, p est l'unique extension non déviante globale de $p{\restriction}_B$.*

Démonstration. Puisque p est B-invariant pour $B \supseteq A$, il est en particulier Lascar B-invariant, donc non déviant au dessus de B. Il n'est question ici donc que de l'unicité.

Pour le sens de gauche à droite nous pouvons supposer que $B = A$. Soit donc p génériquement stable, et soit q aussi une extension non déviante globale de $p{\restriction}_A$. Alors $p{\restriction}_A = q{\restriction}_A$, et puisque p et $p^{(n)}$ sont A-invariants, $p \otimes p^{(n)}{\restriction}_A = q \otimes p^{(n)}{\restriction}_A$ pour tout n. Par commutativité de p:

$$p^{(n)}(\bar{x}) \otimes q(y){\restriction}_A = q(y) \otimes p^{(n)}(\bar{x}){\restriction}_A = p(y) \otimes p^{(n)}(\bar{x}){\restriction}_A = p^{(n)}(\bar{x}) \otimes p(y){\restriction}_A.$$

Maintenant, par récurrence sur n, nous montrons que $q^{(n)}{\restriction}_A = p^{(n)}{\restriction}_A$. En effet, puisque $p^{(n)}$ est A-invariant et q Lascar A-invariant:

$$p^{(n+1)}{\restriction}_A = p^{(n)} \otimes q{\restriction}_A = q^{(n)} \otimes q{\restriction}_A = q^{(n+1)}{\restriction}_A.$$

Ainsi, $p^{(\omega)}{\restriction}_A = q^{(\omega)}{\restriction}_A$. Soit maintenant $\varphi(x,b) \in q$, et réalisons $(a_n)_n \vDash q^{(\omega)}{\restriction}_{Ab}$. Alors $(a_n)_n \vDash p^{(\omega)}{\restriction}_A$ et $\vDash \varphi(a_n,b)$ pour tout n, d'où $\vDash d_p\varphi(x,b)$ et $\varphi(x,b) \in p$. Nous avons bien démontré que $p = q$.

Réciproquement, supposons que p est l'unique extension non déviante de $p{\restriction}_B$, pour tout $B \supseteq A$. Fixons une réalisation $I = (a_n)_n \vDash p^{(\omega)}$, et soit $q(x) = \mathrm{Av}(I/\mathfrak{M})$. Pour chaque $B_0 \in AI$ fini nous avons $B_0 \subseteq A, a_0 \ldots a_{n-1}$ pour un certain n. Pour $i > n$ nous avons $a_i \vDash p{\restriction}_{B_0}$, d'où $q{\restriction}_{B_0} = p{\restriction}_{B_0}$. On en déduit que $p{\restriction}_{AI} = q{\restriction}_{AI}$. En outre, q est finiment réalisé dans I, donc dans AI, et en particulier ne dévie pas au-dessus de AI. Par hypothèse (pour $B = AI$), $p = q = \mathrm{Av}(I/\mathfrak{M})$.

Soit encore $b \vDash p{\restriction}_{AI}$ et $c \vDash p{\restriction}_{Ab} = \mathrm{Av}(I/Ab)$, donc $a_n b \vDash p^{(2)}(x,y){\restriction}_A$ pour tout n et $bc \vDash p^{(2)}(x,y){\restriction}_A$. Il en découle que $p{\restriction}_{Ab} = \mathrm{Av}(I/Ab) = p^{(2)}{\restriction}_A(x,b)$. Nous avons donc $p^{(2)}(x,y){\restriction}_A = \mathrm{tp}(cb/A) = p^{(2)}(y,x){\restriction}_A$. Le même argument est encore valable si on remplace A par un quelconque $B \supseteq A$. Nous avons ainsi démontré que $p^{(2)}(x,y) = p^{(2)}(y,x)$, p commute donc avec lui-même et est par conséquence génériquement stable. $\blacksquare_{5.13}$

Références

[Poi85] Bruno Poizat, *Cours de théorie des modèles*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1985.

URL: http://math.univ-lyon1.fr/~begnac/