

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 Dans le cours, un groupe est défini comme une paire $(G, *)$ vérifiant certains axiomes dont l'existence d'un élément neutre à gauche e et d'un inverse à gauche x' pour tout élément x de G . Montrer que e est également un neutre à droite et que x' est un inverse à droite de x .

Exercice 2 Soit G un groupe. Montrer que

1. $e^{-1} = e$;
2. $\forall x \in G, (x^{-1})^{-1} = x$;
3. $\forall x \in G, \forall m, n \in \mathbb{Z}, (x^n)^{-1} = x^{-n}, x^{m+n} = x^m x^n$ et $x^{mn} = (x^m)^n$;
4. $\forall x, y \in G, (xy)^{-1} = y^{-1} x^{-1}$;
5. $\forall x, y \in G$, si $xy = xz$ alors $y = z$;
6. $\forall x, y, z \in G$, si $yx = zx$ alors $y = z$;
7. $\forall y \in G$, l'application de G dans G définie par $x \mapsto xy$ est bijective;
8. $\forall y \in G$, l'application de G dans G définie par $x \mapsto yx$ est bijective.

Exercice 3 Montrer qu'un groupe G dont tous les éléments x vérifient $x^2 = e$ est abélien.

Exercice 4 Soit G un groupe fini. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que, pour tout $x \in G$, $x^N = e$.

Exercice 5 Soit G un groupe fini d'ordre pair. Montrer qu'il existe $x \in G \setminus \{e\}$ tel que $x = x^{-1}$.

Exercice 6 Est-ce un groupe? Si oui, est-il abélien?

1. $(\mathbb{R}^{+\times}, \cdot), (\mathbb{C}^\times, +), (\mathbb{C}, \cdot), (\mathbb{U}, +), (\mathbb{U}, \cdot), (\mathbb{U}_n, \cdot), (\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}, \cdot)$, où \mathbb{U} est l'ensemble des nombres complexes de module 1 et \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité dans \mathbb{C} .
2. L'ensemble des applications affines de \mathbb{R} dans \mathbb{R} muni de l'addition (resp. multiplication, composition) des fonctions.
3. L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel muni de l'addition (resp. composition) des applications.
4. L'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ muni de l'addition (resp. multiplication) matricielle.
5. L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ et de déterminant non nul muni de l'addition (resp. multiplication) matricielle.
6. L'ensemble des rotations du plan muni de la composition des applications.
7. L'ensemble des rotations du plan de centre O fixé muni de la composition des applications.

Exercice 7 Soient X est un ensemble et P une partie de X . Montrer que l'ensemble $S_{X,P}$ des bijections σ de X dans X telles que $\sigma(P) = P$ muni de la composition des applications est un groupe. Quel est l'ordre de ce groupe? S'agit-il d'un groupe abélien (la réponse dépend de X et P)?

Exercice 8 Soit $n \geq 1$ un entier. On rappelle que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de \mathbb{Z} pour la relation de congruence modulo n . La classe d'équivalence de $x \in \mathbb{Z}$ modulo n est notée \bar{x} .

1. Montrer qu'il est légitime de définir une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$.
2. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.
3. Montrer qu'il est légitime de définir une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}$. Montrer que cette loi est associative, commutative et possède un élément neutre.
4. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$ n'est pas un groupe si $n \geq 2$.

Exercice 9 1. Montrer que la table de la loi de composition d'un groupe fini est un carré latin, c'est-à-dire un tableau carré dans lequel chaque élément apparaît une et une seule fois dans chaque ligne et chaque colonne.

2. Donner la liste des tables possibles pour les groupes à 2, 3 ou 4 éléments. On cherchera en particulier des exemples de groupes pour chacune d'entre elles. Montrer qu'un groupe à 2, 3 ou 4 éléments est commutatif.

Exercice 10 Soient G_1 et G_2 deux groupes.

1. Montrer que l'ensemble $G_1 \times G_2$ muni de la loi de composition

$$(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2)$$

est un groupe. On parle du produit direct des groupes G_1 et G_2 .

2. Montrer que le produit direct $G_1 \times G_2$ est abélien si et seulement si les groupes G_1 et G_2 le sont.

Exercice 11 Déterminer les $a \in \mathbb{Z}$ tels que $\langle a \rangle = \mathbb{Z}$.

Exercice 12 Déterminer les $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $\langle \bar{a} \rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 13 Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-il monogène ?

Exercice 14 1. Montrer qu'un groupe d'ordre 2 ou 3 est monogène.

2. Montrer que certains groupes d'ordre 4 sont monogènes et d'autres pas.

Exercice 15 1. Montrer qu'un groupe monogène est abélien.

2. Montrer qu'un groupe isomorphe à un groupe monogène est monogène.

3. Montrer que deux groupes monogènes sont isomorphes si et seulement si ils ont le même ordre.

Exercice 16 Montrer que l'ensemble de matrices

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

muni de la multiplication matricielle est un groupe isomorphe à \mathbb{R} .