Feuille d'exercices 3

Dans cette feuille, on utilisera la notion de groupe normal : un sous-groupe H d'un groupe G est dit normal (ou distingué) si, pour tout $g \in G$, $gHg^{-1} = H$.

Exercice 1 Soit H un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G.
1. Soit $g \in G \setminus H$. Montrer que $G/H = \{H, gH\}$ et que l'on a $gH = G \setminus H$ et $H = G \setminus gH$.
2. Enoncer et démontrer des propriétés similaires pour les classes à droite.
3. Montrer que H est un sous-groupe normal de G.

Exercice 2 Donner l'indice et la liste des classes à gauche dans les cas suivants.
1. Les sous-groupes $\langle x^2 \rangle$ et $\langle x^5 \rangle$ du groupe cyclique $\langle x \rangle$ d'ordre 10.
2. Les sous-groupes $\langle r \rangle$ et $\langle s \rangle$ du groupe diédral D_4.

Exercice 3 Dresser la liste des sous-groupes de S_3.
1. Quelles sont les classes à gauche et à droite du sous-groupe $\langle (1,2) \rangle$ de S_3?

Exercice 4 Soit G un groupe et H, N deux sous-groupes de G. On pose $NH = \{nh,\ n \in N, h \in H\}$.
1. Montrer que $H \cap N$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que NH est un sous-groupe de G ssi $NH = HN$.
3. Que dire de l'union de $H \cup N$?

Exercice 5 Soient G et H deux groupes.
1. Montrer que si g est un élément d'ordre p de G et h un élément d'ordre q de H, alors (g, h) est d'ordre $ppcm(p, q)$ dans $G \times H$.
2. On suppose que G et H sont cycliques. Démontrer que $G \times H$ est cyclique si et seulement si les ordres de G et H sont premiers entre eux.

Exercice 6 Soit G un groupe et $H \leq G$ un sous-groupe. On suppose que H est l'unique sous-groupe de G d'ordre $|H|$. Montrer que H est normal dans G. (Indication: pour $a \in G$ considérer aHa^{-1}.)

Exercice 7 Soient M et N deux sous-groupes normaux de G. Montrer que si $M \cap N = \{e\}$, alors quels que soient $m \in M$ et $n \in N$, $mn = nm$.

Exercice 8 (Groupe quaternionique)
Soit
$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$
1. Calculer $I^2, J^2, K^2, IJ, JK, KI$. En déduire que dans $Gl_2(\mathbf{C})$, on a
$$\langle I, J \rangle = \{\pm\mathbf{1}, \pm I, \pm J, \pm K\}.$$
2. Faire la liste des sous-groupes de $\langle I, J \rangle$.
3. Un groupe dont tous les sous-groupes sont normaux est-il nécessairement abélien?

Exercice 9 Soit G un groupe fini tel que $x^2 = e$ pour tout $x \in G$.
1. Rappeler pourquoi G est abélien.
2. Montrer, par une récurrence sur l'ordre $|G|$ de G, qu'il existe un entier $r \geq 0$ tel que $|G| = 2^r$. (Indication: pour $x \in G \setminus \{e\}$, utiliser le quotient $G/\langle x \rangle$.)

Exercice 10 (Signature d'une permutation et groupe alterné) Soit $n \geq 2$. On dit qu'une paire d'entier $\{i, j\}$ avec $1 \leq i < j \leq n$ est une inversion de $\sigma \in S_n$ si $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note $N(\sigma)$ le nombre d'inversions $\{i, j\}$ de σ. On définit la signature $\varepsilon(\sigma)$ de σ par

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}.$$

1. Montrer que

$$\varepsilon(\sigma) = \Pi_{\{i,j\} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i},$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des paires $\{i, j\}$ d'entiers $1 \leq i \neq j \leq n$.
2. Montrer que $\varepsilon : S_n \to \{+1, -1\}$ est un morphisme de S_n sur le groupe multiplicatif $\{+1, -1\} = U_2$.
3. Calculer la signature d'une transposition (ab).
4. En déduire la signature d'un l-cycle $(i_1 \cdots i_l)$. On pourra utiliser l'exercice 12.
5. Calculer la signature de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

6. Montrer que pour toute permutation $\sigma \in S_n$ et tout $l-$ cycle $(i_1 \cdots i_l) \in S_n$ on a

$$\sigma(i_1 \cdots i_l)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_l)).$$

7. Montrer que la signature et le morphisme constant sont les seuls morphismes $\varphi : S_n \to \{\pm 1\}$.
8. Le noyau $Ker(\varepsilon)$ est noté A_n et appelé le *groupe alterné.* Calculer l'indice et l'ordre de A_n. Montrer que si $\tau \in S_n$ est une transposition alors

$$S_n = A_n \bigcup \tau A_n.$$

Exercice 11 1. Montrer que S_n est engendré par les transpositions. On pourra raisonner par récurrence sur $n \geq 2$.

Exercice 12 Le but de cet exercice est de donner une nouvelle solution de l'exercice 11. Nous allons en fait démontrer un résultat plus fort, à savoir que S_n est engendré par les transpositions de la forme $(i\, i+1)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.
1. Soit $c = (i_1 i_2 \cdots i_l)$ un l-cycle. Montrer que $c = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{l-1} i_l)$.
2. Montrer que pour tout i, j vérifiant $i < j - 1$ on a $(ij) = (j-1\, j)\,(i\, j-1)\,(j-1\, j)$.
3. En déduire que S_n est engendré par les transpositions $(i\, i+1)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.