Feuilles d'exercices 4

Exercice 1 [Théorème chinois des restes] — Soit m et n deux entiers naturels premiers entre eux.

1. Démontrer que l'application
$$\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z},\ x \mapsto (x \pmod m), x \pmod n))$$
induit un isomorphisme d'anneaux $\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z} \tilde{\to} \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
2. En déduire un isomorphisme de groupes $(\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z})^\times \tilde{\to} (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\times \times (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$.
3. En déduire une méthode de calcul de l'indicatrice d'Euler φ.
4. Déduire de ce qui précède que le produit direct de deux groupes cycliques d'ordres premiers entre eux est cyclique (cf. Fiche 3, exercice 5).

Exercice 2 — Soit G_1, G_2 des groupes et $H_1 \lhd G_1$, $H_2 \lhd G_2$ des sous-groupes distingués. Démontrer que le sous-groupe $H_1 \times H_2$ de $G_1 \times G_2$ est distingué, puis construire un isomorphisme entre les groupes
$$(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \ \text{ et } \ (G_1/H_1) \times (G_2/H_2).$$

Exercice 3 — Soit K un corps commutatif et soit
$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ a, b, c \in K \right\}.$$

1. Vérifier que Γ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(K)$.
2. Déterminer le centre $Z(\Gamma)$ de Γ, puis définir un isomorphisme entre les groupes
$$\Gamma/Z(\Gamma) \ \text{ et } \ K \times K$$
où K désigne le groupe additif $(K, +)$.

Exercice 4 — Considérons un corps commutatif K et un sous-groupe fini G du groupe multiplicatif $K^\times$. Le but de cet exercice est de démontrer que le groupe G est *cyclique*.

Posons $n = |G|$. On pourra utiliser librement l'identité
$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$
(Fiche 2, exercice 5).

Pour tout diviseur d de n, désignons par $\alpha(d)$ le nombre d'éléments d'ordre d dans G.

1. Soit d un diviseur de n.
   (i) Démontrer que G contient au plus d éléments dont l'ordre divise d.
   (ii) Démontrer que, si $\alpha(d) \geqslant 1$, alors $\alpha(d) = \varphi(d)$.
   (*Examiner les éléments du sous-groupe $\langle x \rangle$, où $x \in G$ est un élément d'ordre d.*)

2. Déduire de ce qui précède que le groupe G est cyclique.

Remarque. Il est nécessaire de considérer un corps *commutatif.* Le groupe quaternionique $\mathbf{H}_8$ (Fiche 3, exercice 8) est un sous-groupe fini non cyclique du corps non commutatif $\mathbf{H}$ des quaternions.

Exercice 5 — Soit G un groupe.

1. Vérifier que l'ensemble $\mathrm{Aut}(G)$ des automorphismes de G est un sous-groupe de S_G.
2. Pour tout $g \in G$, on désigne par $\mathrm{int}(g)$ la conjugaison par g, i.e. $\mathrm{int}(g)(x) = gxg^{-1}$ pour tout $x \in G$. Vérifier que l'application

$$\mathrm{int} : G \to \mathrm{Aut}(G), \quad g \mapsto \mathrm{int}(g)$$

   est un morphisme de groupes.
3. Déterminer son noyau et vérifier que son image est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$.

Exercice 6 [Théorème de Cayley] — Soit G un groupe.

1. Pour tout $g \in G$, désignons par τ_g la translation à gauche par g dans G, i.e. $\tau_g(x) = gx$ pour tout $x \in G$. Vérifier que l'application

$$G \to S_G, \quad g \mapsto \tau_g$$

   réalise un isomorphisme de G sur un sous-groupe de S_G.
2. En déduire que tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n.
3. Soit K un corps commutatif et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de K^n. Pour toute permutation $\sigma \in S_n$, soit $M(\sigma)$ la matrice transformant le vecteur e_i en $e_{\sigma(i)}$.
   (i) Vérifier que l'application

$$S_n \to \mathrm{GL}_n(K), \; \sigma \mapsto M(\sigma)$$

   réalise un isomorphisme de S_n sur un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$.

   (ii) Soit p un nombre premier et soit $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ le corps à p éléments. Déduire de ce qui précède que tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$.

Exercice 7 — 1. Écrire les 12 éléments du groupe alterné A_4 et déterminer leurs ordres.

2. Démontrer que le centre de A_4 est trivial. (*Observer que $\sigma \in Z(A_4)$ doit commuter aux* 3-*cycles)*).
3. Vérifier que

$$K = \{\mathrm{id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$$

   est un sous-groupe d'ordre de A_4, et que c'est le seul sous-groupe d'ordre 4.
4. En déduire que K est un sous-groupe distingué dans A_4.

Exercice 8 — Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué. On suppose H fini d'ordre m et on désigne par $\overline{x}$ la classe de $x \in G$ dans le quotient G/H.

Étant donné $n \geqslant 1$ tel que $(m, n) = 1$, démontrer les propriétés suivantes :

(i) si $x \in G$ est d'ordre n, alors $\overline{x}$ est d'ordre n;

(ii) si $\overline{x}$ est d'ordre n, alors $\overline{x}$ contient un élément d'ordre n.
(*Utiliser le théorème de Bézout*)