Feuilles d'exercices 6

Exercice 1

Soit G un groupe qui s'écrit $G = H \rtimes K$. Montrer que :

1. L'application $\pi : \begin{array}{ccc} G & \to & K \\ xy & \mapsto & y \end{array}$,(où $x \in H$ et $y \in K$) est un morphisme surjectif. On l'appelle la projection canonique sur K.
2. Le noyau de la projection canonique sur K est H.
3. Soit $s : K \to G$ l'application identité. Alors c'est encore un morphisme (un plongement), et $\pi \circ s = \mathrm{id}|_K$
4. Montrer la réciproque. Soit G un groupe, $\pi : G \to K$ un morphisme surjectif, et soit $H = \ker(\pi)$. Supposons en outre que $s : K \to G$ est un morphisme tel que $\pi \circ s = \mathrm{id}|_K$ (on dit dans ce cas que s est une *section* de π). Alors s est un plongement, de sorte que $\mathrm{img}(s) \simeq K$, et $G = H \rtimes \mathrm{img}(s)$.
5. Donner un exemple de suite exacte courte (c'est le nom de la configuration précédente sans l'existence de section) qui n'est pas un produit semi-direct.

Exercice 2

Soient H et N des groupes et soient ϕ et $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ des morphismes. On veut trouver des conditions suffisantes pour que $N \rtimes_\phi H$ et $N \rtimes_\psi H$ soient isomorphes.

1. S'il existe un automorphisme α de H tel que $\psi = \phi \circ \alpha$, montrer que l'on a la conclusion attendue.
2. S'il existe un automorphisme u de N tel que $\forall h \in H, \phi(h) = u\psi(h)u^{-1}$, montrer que la conclusion attendue vaut encore.
3. Si H est cyclique et que ϕ et $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ sont tels que $\phi(H) = \psi(H)$, montrer que $N \rtimes_\phi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.

Exercice 3

1. Montrer que S_n s'écrit comme un produit semi-direct de deux sous-groupes stricts.
2. Montrer que l'on peut écrire le groupe dihédral D_n comme un produit semi-direct naturel.
3. Montrer que l'on peut écrire $GL_n(k)$ comme un produit semi-direct naturel (k est un corps)
4. Ces produits semi-directs sont-ils directs ?

Exercice 4

Soit G un groupe. On suppose que $G = AB$, où A est un sous-groupe normal de G et B un sous-groupe de G. (On ne suppose pas que $A \cap B = 1$, autrement dit que A est produit semi-direct de A par B).

Soit $\theta : b \mapsto (\theta_b : a \mapsto bab^{-1})$ l'homomorphisme de B dans $\mathrm{Aut}(A)$ correspondant à l'action de B sur A par conjugaison. On désignera par $A \rtimes_\theta B$ le produit semi-direct externe de A par B relativement à θ.

1. Prouver que l'application $f : (a,b) \mapsto ab$ de $A \rtimes_\theta B$ dans G est un homomorphisme dont le noyau est l'ensemble des couples (c^{-1}, c), où c parcourt $A \cap B$.

2. Prouver que G est isomorphe au quotient de $A \rtimes_\theta B$ par un sous-groupe normal N de $A \rtimes_\theta B$ possédant les propriétés suivantes :

   i) $N \cap (A \times \{1\}) = 1$;

   ii) $N \cap (\{1\} \times B) = 1$;

   iii) N est isomorphe à $A \cap B$.