

Feuilles d'exercices 7

Exercice 1. Soit $a, b \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$ est naturellement isomorphe au produit direct de ses sous-groupes de Sylow.

Exercice 2. 1. Soit G un groupe fini, S et S' deux sous-groupes distincts de G d'ordre premier p . Que peut-on dire de $|S \cap S'|$?

2. Dénombrer les éléments d'ordre 3 et 5 de S_5 . En déduire le nombre de 3-Sylow et de 5-Sylow de S_5 .

Exercice 3. Soit G le groupe $GL_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ avec p premier.

1. Rappeler le calcul de l'ordre de G .

2. Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est d'ordre p et que $\langle A \rangle$ est un p -Sylow de G .

3. En déduire que toute matrice $M \in G$ d'ordre p est conjuguée à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. En vous servant de l'action par conjugaison de G sur l'ensemble $\mathcal{S}(p)$ de ses p -Sylow, montrer que $|\mathcal{S}(p)| = p + 1$.

5. En déduire qu'il y a $p^2 - 1$ éléments d'ordre p dans G .

Exercice 4. 1. Soit G un groupe fini, S et S' deux sous-groupes de G avec S distingué et

$$\text{pgcd}(|S|, |S'|) = 1.$$

Que peut-on dire de $|S \cap S'|$ et de $|SS'|$?

2. Faire la liste des groupes d'ordre 15 à isomorphisme près. (*Commencer par compter les sous-groupes de Sylow*)

Remarque. C'est un cas particulier d'un théorème de cours sur les groupes G d'ordre pq avec $p < q$ premiers.

Exercice 5. Un groupe G est dit *simple* s'il n'admet pas de sous-groupes distingués hormis G lui-même et $\{e\}$. Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 7 dans un groupe simple d'ordre 168? (*Utiliser le nombre de 7-Sylow*)

Exercice 6. 1. Montrer que si G est un groupe d'ordre 45 alors G est abélien. (*Argument identique à celui de l'exercice 4*)

2. Plus généralement, montrer que tout groupe G d'ordre p^2q avec p, q premiers, $p < q$ et $q \not\equiv 1 \pmod{p}$, est abélien.

Exercice 7. Soient $p < q < r$ trois nombres premiers et G un groupe d'ordre pqr . Pour $s \in \{p, q, r\}$, on note N_s le nombre de s - Sylow de G .

1. Montrer que $N_q(q-1) + N_r(r-1) \leq pqr - 1$.
2. Montrer que $N_r = 1$ ou $N_r = pq$.
3. Montrer que $N_q = 1$ ou $N_q \geq r$.
4. En déduire que $N_q = 1$ ou $N_r = 1$ et donc que G n'est pas un groupe simple.