Feuilles d'exercices 8

Exercice 1 — Soit G un groupe fini. Pour chaque nombre premier p divisant l'ordre de G, désignons par G_p l'un des p-sous-groupes de Sylow de G. Démontrer que G est engendré par la famille des sous-groupes G_p.

(*On pourra s'intéresser à l'ordre du sous-groupe engendré par les* Gp.

Exercice 2 [p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$] — Soit p un nombre premier. On désigne par $\mathbf{F}_p$ le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

1. Soit $n \geqslant 1$ un nombre entier. Calculer l'ordre du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$, puis démontrer que le sous-groupe $\mathrm{U}_n(\mathbf{F}_p)$, formé des matrices triangulaires supérieures dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1, est un p-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$.
2. Construire une suite décroissante de sous-groupes
$$G_n = \{I_n\} \triangleleft G_{n-1} \triangleleft \ldots \triangleleft G_2 \triangleleft G_1 = U_n(\mathbf{F}_p)$$
telle que chaque quotient G_i/G_{i+1} soit isomorphe à un produit de copies de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Exercice 3 [p-Sylow du groupe symétrique] — Soit p un nombre premier et $n \geqslant 1$ un nombre entier. Le but de cet exercice est de mettre en évidence un p-sous-groupe de Sylow dans le groupe symétrique S_n.

1. Démontrer que les p-Sylow de S_n sont d'ordre p^N, avec
$$N = \sum_{a\geqslant 1} \left[\frac{n}{p^a}\right].$$
2. Identifier et dénombrer les p-sous-groupes de Sylow du groupe symétrique S_p. En déduire la congruence (théorème de Wilson) :
$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$
3. Considérons la partition
$$\{1,\ldots,p^2\} = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_p$$
où
$$X_k = \left\{(k-1)p+1, (k-1)p+2, \ldots, kp\right\}.$$
Désignons par Σ le sous-groupe de S_{p^2} formé des permutations σ respectant cette partition, c'est-à-dire telles que $\sigma(X_i) \in \{X_1,\ldots,X_p\}$ pour tout i.
   (i) Vérifier que l'application
   $$\Sigma \to S_p, \quad \sigma \mapsto \overline{\sigma}$$
   définie par
   $$\forall\, i \in \{1,\ldots,p\}, \quad \sigma(X_i) = X_{\overline{\sigma}(i)}$$
   est un morphisme de groupes surjectif, puis expliciter son noyau.
   (ii) En déduire que Σ contient un sous-groupe P isomorphe à un produit semi-direct $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^p \rtimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

(iii) Vérifier que P est un p-sous-groupe de Sylow de S_{p^2}.

4. Soit $m \geqslant 2$. Supposons que P_{m-1} soit un p-sous-groupe de Sylow de $S_{p^{m-1}}$. En s'inspirant de la question 3, construire un p-sous-groupe de Sylow P_m de S_{p^m} isomorphe à un produit semi-direct de P_{m-1}^p par $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
5. Écrivons n sous la forme
$$n = a_0 + a_1 p + \ldots + a_r p^r$$
avec $a_0, \ldots, a_r \in \{0, \ldots, p-1\}$ et $a_r \neq 0$. En partitionnant judicieusement l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, démontrer que S_n contient un sous-groupe P isomorphe à $P_1^{a_1} \times \ldots \times P_r^{a_r}$, puis vérifier que P est un p-Sylow de S_n.

Exercice 4 — Expliciter un p-sous-groupe de Sylow de S_4 pour $p = 2, 3$. Même question pour S_6 et $p = 2, 3, 5$.

Exercice 5 [Sylow par Cayley] — Cet exercice propose deux nouvelles démonstrations du premier théorème de Sylow, reposant sur le théorème de Cayley (TD4, exercice 6) et les exercices 2 et 3 ci-dessus.

1. Soit K un groupe fini et soit G un sous-groupe de K. Supposons que p divise $|K|$ et choisissons un p-sous-groupe de Sylow P de K. Considérons l'action de G sur K/P par translation à gauche :
$$g \cdot kP = gkP$$
pour tous $g \in G, k \in K$.
   (i) Expliciter le stabilisateur de la classe kP.
   (ii) En exploitant l'équation aux classes, démontrer qu'il existe $k \in K$ tel que $kPk^{-1} \cap G$ soit un p-sous-groupe de Sylow de G.
2. Soit G un groupe fini d'ordre n.
   (i) Rappeler comment construire un isomorphisme entre G et un sous-groupe de S_n (resp. de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$).
   (ii) Déduire de ce qui précède deux nouvelles démonstrations de l'existence d'un p-sous-groupe de Sylow dans G.

Exercice 6 [Simplicité du groupe A_5] — Cet exercice a pour objectif de démontrer que le groupe A_5 est *simple*, c'est-à-dire qu'il ne possède pas de sous-groupe distingué autre que $\{\mathrm{id}\}$ et A_5.

Dans le cadre de la théorie de Galois, ce fait entraîne l'impossibilité de résoudre une équation polynomiale de degré 5 générale par radicaux itérés.

1. Identifier et dénombrer les éléments d'ordre 3 dans A_5. En déduire le nombre de ses 3-Sylow.
2. Même question pour les éléments d'ordre 5 et les 5-Sylow.

Soit H un sous-groupe distingué de A_5.

3. Si H contient un élément d'ordre 3 ou d'ordre 5, démontrer qu'alors $|H| = 30$ ou $|H| = 60$, puis $H = A_5$.
4. Supposons maintenant que H soit un 2-groupe.
   (i) Démontrer que l'on a nécessairement $|H| = 2$.
   (i) En déduire que H est contenu dans le centre de A_5, puis que H est trivial.