Feuilles d'exercices 9

Partout dans cette feuille, le (sous-)groupe trivial $\{e\}$ est noté par 1.

Exercice 1. Soit G un groupe. On rappelle que le *groupe dérivé* de G est

$$G' = [G, G] = \langle [x, y] : x, y \in G \rangle.$$

Montrer que pour tout automorphisme $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$:

$$\varphi(G') = G'.$$

En déduire une nouvelle preuve du fait que $G' \trianglelefteq G$.

Exercice 2. Même chose, en remplaçant G' par le *centre* de G :

$$Z(G) = \{x \in G : xy = yx \text{ pour tout } y \in G\}.$$

Exercice 3. Montrer que si $G' \leq H \leq G$ alors $H \trianglelefteq G$.
Indication : on pourrait montrer d'abord que si $\varphi\colon G \to K$ est un morphisme, et $K_1 \trianglelefteq K$, alors $\varphi^{-1}(K_1) \trianglelefteq G$.

Exercice 4. On pose :

$$G^{(0)} = G, \qquad G^{(n+1)} = (G^{(n)})'.$$

On dit que G est *résoluble* s'il existe n tel que $G^{(n)} = 1$.

1. Montrer que si

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_r$$

est une suite telle que G_i / G_{i+1} est abélien pour tout $0 \leq i < r$, alors $G_i \geq G^{(i)}$ pour tout $0 \leq i \leq r$.

2. En déduire que G est résoluble si et seulement s'il existe une suite

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_r = 1$$

telle que chaque quotient G_i / G_{i+1} (pour $0 \leq i < r$) soit abélien.

Exercice 5. Soit G un groupe, et posons :

$$H_0 = G, \qquad H_{n+1} = H_n / Z(H_n).$$

On dit que G est *nilpotent* s'il existe n tel que $H_n = 1$.

1. Montrer que tout groupe nilpotent est résoluble. Pour cela, on pourrait construire des morphismes naturels $\varphi_n\colon G \to H_n$, et considérer les sous-groupes $K_n = \ker \varphi_n$.

2. Soit p un nombre premier. Montrer que tout groupe fini d'ordre une puissance de p est nilpotent (*Indication : utiliser l'exercice 5 de la fiche 5)*

Exercice 6. On dit que H est un *sous-groupe distingué maximal* de G si $H \lhd G$ (donc en particulier $H \neq G$), et tout sous-groupe intermédiaire $H \leq K \trianglelefteq G$ est ou bien H ou bien G.

1. Supposons que $H \trianglelefteq G$. Rappeler pourquoi H est un sous-groupe distingué maximal de G si et seulement si G/H est simple.

2. Soit H et K deux sous-groupes distingués maximaux distincts de G, et posons $L = H \cap K$. Montrer que :

   - $G = HK$.
   - L est un sous-groupe distingué maximal de H et de K.
   - $G/K \cong H/L$.
   - $G/H \cong K/L$.

Exercice 7. Soit G un groupe fini. Montrer qu'il existe une suite finie de sous-groupes $G_0, G_1, \ldots, G_r$ telle que $G_0 = G$, $G_r = 1$, et chaque G_{i+1} est un sous-groupe distingué maximal de G_i. Une telle suite

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_r = 1$$

s'appelle une *de Jordan-Hölder* de G.

Exercice 8. À l'aide de l'exercice 6, démontrer le théorème de Jordan-Hölder :

> Soit G un groupe fini, et soit
>
> $$\begin{aligned} G &= G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_r = 1, \\ H &= H_0 \rhd H_1 \rhd \cdots \rhd H_t = 1 \end{aligned}$$
>
> deux suites de Jordan-Hölder de G. Alors $r = t$, et les deux listes de quotients $(G_i/G_{i+1} : 0 \leq i < r)$ et $(H_i/H_{i+1} : 0 \leq i < r)$ se déduisent l'une de l'autre par une permutation.

Indication : procéder par récurrence sur $\min(t, r)$.

Exercice 9. Soit k un corps commutatif et soit $n \geqslant 1$ un nombre entier. Démontrer que le sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(k)$ formé des matrices triangulaires supérieures est résoluble.

Exercice 10. Soit k un corps commutatif et soit $n \geqslant 1$ un nombre entier. Le groupe de Heisenberg $\mathrm{Heis}_n(k)$ est par définition le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{n+2}(k)$ formé des matrices de la forme $(n+2)x(n+2)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{x} & z \\ 0 & I_n & \mathbf{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_n & z \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En écrivant une telle matrice sous la forme $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)$, calculer le commutateur de deux éléments de $\mathrm{Heis}_n(k)$, puis démontrer que ce groupe est résoluble.