Feuille d'exercices 1

Exercice 1 Soit G un groupe. Montrer que

1. $e^{-1} = e$;
2. $\forall x \in G$, $(x^{-1})^{-1} = x$;
3. $\forall x \in G$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, $(x^n)^{-1} = x^{-n}$, $x^{m+n} = x^m x^n$ et $x^{mn} = (x^m)^n$;
4. $\forall x, y \in G$, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$;
5. $\forall x, y \in G$, si $xy = xz$ alors $y = z$;
6. $\forall x, y, z \in G$, si $yx = zx$ alors $y = z$;
7. $\forall y \in G$, l'application de G dans G définie par $x \mapsto xy$ est bijective;
8. $\forall y \in G$, l'application de G dans G définie par $x \mapsto yx$ est bijective.

Exercice 2 Montrer qu'un groupe G dont tous les éléments x vérifient $x^2 = e$ est abélien.

Exercice 3 Soit G un groupe fini. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que, pour tout $x \in G$, $x^N = e$.

Exercice 4 Soit G un groupe fini d'ordre pair. Montrer qu'il existe $x \in G \setminus \{e\}$ tel que $x = x^{-1}$.

Exercice 5 Est-ce un groupe? Si oui, est-il abélien?
1. $(\mathbb{R}^{+\times}, \cdot)$, $(\mathbb{C}^{\times}, +)$, $(\mathbb{C}, \cdot)$, $(\mathbb{U}, +)$, $(\mathbb{U}, \cdot)$, $(\mathbb{U}_n, \cdot)$, $(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}, \cdot)$, où $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1 et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.
2. L'ensemble des applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition (resp. multiplication, composition) des fonctions.
3. L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel muni de l'addition (resp. composition) des applications.
4. L'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ muni de l'addition (resp. multiplication) matricielle.
5. L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ et de déterminant non nul muni de l'addition (resp. multiplication) matricielle.
6. L'ensemble des rotations du plan muni de la composition des applications.
7. L'ensemble des rotations du plan de centre O fixé muni de la composition des applications.

Exercice 6 Soient X est un ensemble et P une partie de X. Montrer que l'ensemble $S_{X,P}$ des bijections σ de X dans X telles que $\sigma(P) = P$ muni de la composition des applications est un groupe. Quel est l'ordre de ce groupe ? S'agit-il d'un groupe abélien (la réponse dépend de X et P)?

Exercice 7 Soit $n \geq 1$ un entier. On rappelle que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{Z}$ pour la relation de congruence modulo n. La classe d'équivalence de $x \in \mathbb{Z}$ modulo n est notée $\overline{x}$.
1. Montrer qu'il est légitime de définir une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$.
2. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.
3. Montrer qu'il est légitime de définir une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy}$. Montrer que cette loi est associative, commutative et posséde un élément neutre.
4. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$ n'est pas un groupe si $n \geq 2$.

Exercice 8 1. Montrer que la table de la loi de composition d'un groupe fini est un carré latin, c'est-à-dire un tableau carré dans lequel chaque élément apparaît une et une seule fois dans chaque ligne et chaque colonne.
2. Donner la liste des tables possibles pour les groupes à $2, 3$ ou 4 éléments. On cherchera en particulier des exemples de groupes pour chacune d'entre elles. Montrer qu'un groupe à $2, 3$ ou 4 éléments est commutatif.

Exercice 9 Soient G_1 et G_2 deux groupes.
1. Montrer que l'ensemble $G_1 \times G_2$ muni de la loi de composition

$$(g_1, g_2) \cdot (g_1', g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2')$$

est un groupe. On parle du produit direct des groupes G_1 et G_2.
2. Montrer que le produit direct $G_1 \times G_2$ est abélien si et seulement si les groupes G_1 et G_2 le sont.

Exercice 10 Déterminer les $a \in \mathbb{Z}$ tels que $\langle a \rangle = \mathbb{Z}$.

Exercice 11 Déterminer les $\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $\langle \overline{a} \rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 12 Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-il monogène ?

Exercice 13 1. Montrer qu'un groupe d'ordre 2 ou 3 est monogène.
2. Montrer que certains groupes d'ordre 4 sont monogènes et d'autres pas.

Exercice 14 1. Montrer qu'un groupe monogène est abélien.
2. Montrer qu'un groupe isomorphe à un groupe monogène est monogène.
3. Montrer que deux groupes monogènes sont isomorphes si et seulement si ils ont le même ordre.

Exercice 15 Montrer que l'ensemble de matrices

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

muni de la multiplication matricielle est un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$.

Exercice 16 Soit G un ensemble, $*$ une opération binaire sur G, et $e \in G$. Supposons que:

1. G est clos pour $*$: si $x, y \in G$, alors $x * y \in G$.
2. $*$ est associative: si $x, y, z \in G$, alors $x * (y * z) = (x * y) * z$.
3. e est *neutre à gauche*: si $x \in G$, alors $e * x = x$.

4. Chaque $x \in G$ admet un *inverse à gauche* $x' \in G$, c'est à dire que $x' * x = e$.

Montrer que $(G, *)$ est un groupe.
Indication: Il faudrait procéder par plusieurs étapes, en démontrant que:

- Un élément $x \in G$ est égal à e si est seulement si $x * x = x$.
- Pour chaque $x \in G$, x' est également inverse à droite: $x * x' = e$.
- L'élément e est aussi neutre à droite: $x * e = x$ pour tout $x \in G$.