Feuilles d'exercices 2

Exercice 1 Démontrer que tout groupe cyclique d'ordre $n \in \mathbf{N}^*$ est isomorphe au groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$. En déduire que deux groupes cycliques sont isomorphes si et seulement s'ils ont le même ordre.

Exercice 2 1. Démontrer qu'une partie $K \subset \mathbf{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$ si et seulement s'il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $K = d\mathbf{Z}$. (*Indication : division euclidienne de* $k \in K$ *par* $\min(K \cap \mathbf{N}^\times)$)

2. Soit $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$. Vérifier que la partie

$$a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = \left\{ka + \ell b,\ (k, \ell) \in \mathbf{Z}^2\right\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$, puis démontrer qu'il existe des entiers d et d' tels que

$$a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = d\mathbf{Z}, \quad a\mathbf{Z} \bigcap b\mathbf{Z} = d'\mathbf{Z}.$$

(*Indication : pour le premier, penser au théorème de Bézout.)*

Exercice 3 1. Donner les ordres de -1 et 2 dans $(\mathbf{Q}^\times, \times)$, de -1 et 2 dans $(\mathbf{Z}, +)$ et des matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 A_2$$

dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$.

2. Soit G un groupe et $a, b \in G$. Montrer que $o(a) = o(a^{-1})$, $o(aba^{-1}) = o(b)$ et $o(ab) = o(ba)$.
3. Soit G un groupe et $a, b \in G$ d'ordres finis tels que $ab = ba$. Montrer que $o(ab)$ divise ppcm $(o(a), o(b))$.

Exercice 4 Soit G un groupe et $x \in G$ d'ordre $n \in \mathbf{N}^\times$.

1. Montrer que x^ℓ est d'ordre $\frac{n}{\mathrm{pgcd}(n,\ell)}$ pour tout $\ell \in \mathbf{Z}$.
2. Quel est le nombre de générateurs du groupe cyclique $\langle x \rangle$?
3. Dresser la liste des générateurs de $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$, du groupe des racines douzièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$ et du sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ engendré par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 Soit G un groupe cyclique d'ordre $n \in \mathbf{N}^\times$.

1. Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique (*Indication : division euclidienne*).
2. Montrer que pour tout diviseur d de n, G contient un unique sous-groupe d'ordre d.
3. Notons $\varphi(d)$ le nombre d'entiers $k \in \{1, \ldots, d\}$ premiers à d. Montrer que pour tout diviseur d de n, le groupe G contient exactement $\varphi(d)$ éléments d'ordre d. En déduire :

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Exercice 6 Dans S_4, on pose

$$K = \{\mathrm{id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}.$$

1. Vérifier que K est un sous-groupe commutatif de S_4.
2. Écrire la table de multiplication de K et en déduire que ce groupe est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

Exercice 7 1. Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n$ est un produit de transpositions de la forme (i,j) avec $i<j$ dans $\{1,\dots,n\}$.

(*Indication : récurrence sur* $n \geq 2$.)

2. Soit $c = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ un p-cycle. Montrer que $c = (i_1,i_2)(i_2,i_3)\cdots(i_{p-1},i_p)$.
3. Montrer que pour tout $i,j \in \{1,\dots,n\}$ vérifiant $i < j-1$, on a $(i,j) = (j-1,j)(i,j-1)(j-1,j)$.
   En déduire que le groupe S_n est engendré par les transpositions $(i,i+1)$ avec $1 \leq i \leq n-1$.
4. Exhiber une famille génératrice minimale du groupe S_3.

Exercice 8 Pour chacune des permutations suivantes, déterminer sa décomposition canonique en produit de cycles à supports disjoints, son ordre et une décomposition en produit de transpositions

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer σ_1^{50} et σ_2^{100}.

Exercice 9 (Groupes diédraux D_n) On rappelle que les isométries linéaires f du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ sont de deux types :

(i) si $\mathrm{Det}(f) = 1$, alors f est une *rotation* et il existe $\theta \in \mathbf{R}$ unique modulo 2π tel que

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

dans toute base orthonormée directe;

(ii) si $\mathrm{Det}(f) = -1$, alors f est une *réflexion* et il existe une base orthonormée du plan dans laquelle $\mathrm{Mat}(f) = \mathrm{diag}(1,-1)$. Dans toute base orthonormée, sa matrice s'écrit

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

avec $\theta \in \mathbf{R}$.

Soit C le carré du plan de sommets $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ et D_4 le sous-groupe des isométries linéaires f telles que $f(C) = C$.

1. Dresser la liste des éléments de D_4.
2. Démontrer qu'il existe une rotation $r \in D_4$ telle que, pour toute réflexion $s \in D_4$,

$$D_4 = \langle r, s\rangle = \langle r\rangle \bigcup s\langle r\rangle.$$

3. Pour $n \geqslant 3$, a-t-on une description similaire du groupe D_n, des isométries linéaires du plan qui conservent les sommets d'un polygone régulier à n côtés?