L3, Mathématiques générales et applications, 2020-2021 — Groupes et Géométrie
Université Lyon 1

Feuille d'exercices 3

Dans cette feuille, on utilisera la notion de sous-groupe distingué : un sous-groupe H d'un groupe G est dit distingué (parfois, normal) si, pour tout $g \in G$, $gHg^{-1} = H$.

Exercice 1 Soit G un groupe.

1. Pour deux parties $A, B \subseteq G$, on pose $AB = \{xy : x \in A,\ y \in B\} \subseteq G$. Montrer que pour $A, B, C \subseteq G$:

$$A(BC) = (AB)C$$

2. Pour $A \subseteq G$ on pose
$$A^{-1} = \{x^{-1} : x \in A\}.$$

Montrer que pour $A, B \subseteq G$:
$$(A^{-1})^{-1} = A, \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3. Pour $A \subseteq G$ on pose, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$A^0 = \{e\}, \qquad A^{n+1} = A^n A.$$

Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$:

$$A^1 = A, \qquad A^{n+m} = A^n A^m, \qquad (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}.$$

4. Soit maintenant $S \subseteq G$. Montrer que $(S \cup S^{-1})^{-1} = S \cup S^{-1}$. En déduire que

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (S \cup S^{-1})^n$$

est un sous-groupe de G.

5. Montrer que $H = \langle S \rangle$. Autrement dit, montrer que c'est le plus petit parmi les sous-groupes de G qui contiennent S.

Exercice 2 Soit H un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G.

1. Soit $g \in G \setminus H$. Montrer que $G/H = \{H, gH\}$ et que l'on a $gH = G \setminus H$ et $H = G \setminus gH$.
2. Enoncer et démontrer des propriétés similaires pour les classes à droite.
3. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 3 Donner l'indice et la liste des classes à gauche dans les cas suivants.

1. Les sous-groupes $\langle x^2 \rangle$ et $\langle x^5 \rangle$ du groupe cyclique $\langle x \rangle$ d'ordre 10.
2. Les sous-groupes $\langle r \rangle$ et $\langle s \rangle$ du groupe diédral D_4.

Exercice 4 Dresser la liste des sous-groupes de S_3.

1. Quelles sont les classes à gauche et à droite du sous-groupe $\langle (1,2) \rangle$ de S_3 ?

Exercice 5 Soit G un groupe et H, N deux sous-groupes de G. On pose $NH = \{nh,\ n \in N, h \in H\}$.

1. Montrer que $H \cap N$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que NH est un sous-groupe de G ssi $NH = HN$.
3. Que dire de l'union de $H \cup N$?

Exercice 6 Soient G et H deux groupes.
1. Montrer que si g est un élément d'ordre p de G et h un élément d'ordre q de H, alors (g,h) est d'ordre $ppcm(p,q)$ dans $G \times H$.
2. On suppose que G et H sont cycliques. Démontrer que $G \times H$ est cyclique si et seulement si les ordres de G et H sont premiers entre eux.

Exercice 7 Soit G un groupe et $H \leq G$ un sous-groupe. On suppose que H est l'unique sous-groupe de G d'ordre $|H|$. Montrer que H est distingué dans G. (Indication : pour $a \in G$ considérer aHa^{-1}.)

Exercice 8 Soient M et N deux sous-groupes distingués de G. Montrer que si $M \cap N = \{e\}$, alors quels que soient $m \in M$ et $n \in N$, $mn = nm$.

Exercice 9 (Groupe quaternionique)

Soit

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $I^2, J^2, K^2, IJ, JK, KI$. En déduire que dans $Gl_2(\mathbf{C})$, on a

$$\langle I, J \rangle = \{\pm\mathbf{1}, \pm I, \pm J, \pm K\}.$$

2. Faire la liste des sous-groupes de $\langle I, J \rangle$.
3. Un groupe dont tous les sous-groupes sont distingués est-il nécessairement abélien?

Exercice 10 Soit G un groupe fini tel que $x^2 = e$ pour tout $x \in G$.
1. Rappeler pourquoi G est abélien.
2. Montrer, par une récurrence sur l'ordre $|G|$ de G, qu'il existe un entier $r \geq 0$ tel que $|G| = 2^r$. (Indication : pour $x \in G \setminus \{e\}$, utiliser le quotient $G/\langle x \rangle$.)

Exercice 11 (Signature d'une permutation et groupe alterné) Soit $n \geq 2$. On dit qu'une paire d'entier $\{i, j\}$ avec $1 \leq i < j \leq n$ est une inversion de $\sigma \in S_n$ si $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note $N(\sigma)$ le nombre d'inversions $\{i, j\}$ de σ. On définit la signature $\varepsilon(\sigma)$ de σ par

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}.$$

1. Montrer que

$$\varepsilon(\sigma) = \Pi_{\{i,j\} \in \mathscr{P}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i},$$

où $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des paires $\{i, j\}$ d'entiers $1 \leq i \neq j \leq n$.

2. Montrer que $\varepsilon : S_n \to \{+1, -1\}$ est un morphisme de S_n sur le groupe multiplicatif $\{+1, -1\} = U_2$.
3. Calculer la signature d'une transposition (ab).
4. En déduire la signature d'un l-cycle $(i_1 \cdots i_l)$. On pourra utiliser l'exercice **??**.
5. Proposer une méthode de calcul de la signature utilisant le fait que toute permutation s'écrit comme composée de cycles de supports disjoints.
6. Calculer la signature de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

7. Montrer que pour toute permutation $\sigma \in S_n$ et tout $l-$ cycle $(i_1 \cdots i_l) \in S_n$ on a

$$\sigma(i_1 \cdots i_l)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_l)).$$

8. Montrer que la signature et le morphisme constant sont les seuls morphismes $\varphi : S_n \to \{\pm 1\}$.

9. Le noyau $Ker(\varepsilon)$ est noté A_n et appelé le *groupe alterné*. Calculer l'indice et l'ordre de A_n. Montrer que si $\tau \in S_n$ est une transposition alors

$$S_n = A_n \bigcup \tau A_n.$$