Feuilles d'exercices 5

Exercice 1 (La formule de Burnside)**.** On suppose que G est un groupe qui agit sur un ensemble X.

1. Montrer que les stabilisateurs de points d'une même orbite sont conjugués (et donc isomorphes).
2. Montrer que le cardinal d'une orbite $O = O_x$ est le quotient de $|G|$ par $|G_x|$.
3. Montrer que $\sum_{x\in X} |G_x| = \sum_{g\in G} |Fix(g)|$.
4. Montrer la formule de Burnside : le nombre d'orbites de l'action est donné par $\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |Fix(g)|$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et p un entier premier.

1. On considère un ensemble C de n couleurs et des colliers constitués de p perles, chacune pouvant être coloriée de l'une des n couleurs. Deux colliers sont considérés comme étant identiques lorsqu'on obtient l'un à partir de l'autre par rotation (mais pas par symétrie...). Combien existe-t-il de tels colliers ?
2. Même question, p n'étant plus supposé premier.

Exercice 3.
1. On fait agir S_3 sur lui meme par conjugaison, quelles sont les orbites ? Idem pour S_4.
2. On fait agir Q_8 le groupe des quaternions sur lui même par conjugaison, quelles sont ses orbites ?
3. On fait agir $GL_n(\mathbf{C})$ sur lui même par conjugaison, quelles sont les orbites ?

Lorsque $G \curvearrowright X$, on dit que $x \in X$ est un *point fixe* pour l'action si $gx = x$ pour tout $g \in G$. D'une manière équivalente, si $O_x = \{x\}$.

Exercice 4. Soit G un groupe fini, et p le plus petit diviseur de $|G|$. Montrer que tout sous-groupe H d'indice p est distingué.

Pour cela, on pourrait procéder ainsi :

1. Montrer que $h \cdot gH = (hg)H$ définit une action $H \curvearrowright G/H$. C'est l'*action naturelle*, ou l'*action par translation*, de H sur G/H.
2. Montrer que cette action admet au moins un point fixe, donc au moins une orbite est réduite à un seul élément.
3. Montrer que toutes les orbite sont réduites à un seul élément.
4. Déduire que H est un sous-groupe distingué.

Exercice 5. On fait agir un groupe d'ordre 143 sur une ensemble de cardinal 108. Montrer qu'il existe un point fixe pour cette action.

Exercice 6 (Un théorème de Cauchy)**.** Nous allons montrer le théorème suivant :

> Si G est un groupe fini d'ordre n et p est un facteur premier de n, alors G continent un membre d'ordre p.

Soit $E \subseteq G^p$ le sous-ensemble défini par

$$E = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in G^p \mid x_1 x_2 \cdots x_p = e\}.$$

1. Quel est le cardinal de E?
2. Pour tout élément $\zeta = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E$ on pose $\sigma(\zeta) = (x_2, x_3, \dots, x_p, x_1)$. Vérifier que σ conserve E et que l'application
$$\phi : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times E \to E : (\overline{k}, \zeta) \mapsto \sigma^k(\zeta)$$
est une action du groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, +)$ sur E.
3. Montrer que ζ est un point fixe de l'action si et seulement si $\zeta = (x, x, \dots, x)$, où $x^p = e$.
4. Montrer que toute orbite est de cardinal 1 ou p.
5. Conclure, en vous servant de la partition de E en orbites.

Exercice 7 (p-groupes)**.** Soit p un nombre premier. On dit qu'un groupe G est un p-groupe si l'ordre de chaque $x \in G$ est une puissance de p.

1. Montrer, en vous servant de l'exercice précédent, que si G est un groupe fini, alors c'est un p-groupe si et seulement si son ordre $|G|$ est une puissance de p.
2. Dans la suite, soit G un p-groupe fini, d'ordre p^r, avec $r \geq 1$. Soit
$$G \times G \to G : (g, x) \mapsto i_g(x) = gxg^{-1}$$
l'action par conjugaison.
Reconnaître l'ensemble des points fixes de cette action.
3. En vous servant de l'équation aux classes, montrer que le centre $Z(G)$ d'un $p-$groupe G est d'ordre > 1.
4. Montrer que tout groupe G d'ordre p^2 est abélien.
Indication : par l'absurde en supposant $Z(G)$ d'ordre p et en raisonnant sur le stabilisateur de $x \in G \setminus Z(G)$.
5. Que peut-on dire d'un groupe d'ordre p^3 ?