Feuilles d'exercices 6 – le produit semi-direct

Exercice 1. Soit G un groupe et $H, K \leq G$ des sous-groupes. Ici, désignons par $H \times K$ le *produit cartésien d'ensembles*, sans le munir d'une quelconque loi de groupe.

Rappeler pourquoi $HK = G$ ssi $KH = G$. Puis, montrer que sont équivalents :

1. L'application
$$\begin{array}{ccc} H \times K & \to & G \\ (h,k) & \mapsto & hk \end{array}$$
est une bijection.

2. Les sous-groupes H et K satisfont $HK = G$ et $H \cap K = \{e\}$.

Exercice 2. Montrer que, supposant que la condition de l'exercice précédent est vérifiée par $H, K \leq G$, sont équivalents :

1. Let sous-groupes H et K commutent dans G, c'est à dire
$$hk = kh \qquad \forall h \in H,\ k \in K.$$

2. Ces deux sous groupes sont distingués : $H \trianglelefteq G$ et $K \trianglelefteq G$.

Indication : penser au *commutateur* $[h, k] = hkh^{-1}k^{-1}$.

Exercice 3. Soit G un groupe qui s'écrit $G = H \rtimes K$ (en rappeler la définition!). Montrer que :

1. L'application
$$\begin{array}{cccc} \pi : & G & \to & K \\ & xy & \mapsto & y, \end{array}$$
(où $x \in H$ et $y \in K$) est un morphisme surjectif. On l'appelle la projection canonique sur K.

2. Le noyau de la projection canonique sur K est H.

3. Soit $s : K \to G$ l'application identité. Alors c'est encore un morphisme (un plongement), et $\pi \circ s = \mathrm{id}|_K$

4. Montrer la réciproque. Soit G un groupe, $\pi : G \to K$ un morphisme surjectif, et soit $H = \ker(\pi)$. Supposons en outre que $s : K \to G$ est un morphisme tel que $\pi \circ s = \mathrm{id}|_K$ (on dit dans ce cas que s est une *section* de π). Alors s est un plongement, de sorte que $\mathrm{img}(s) \simeq K$, et $G = H \rtimes \mathrm{img}(s)$.

5. Donner un exemple de suite exacte courte (c'est le nom de la configuration précédente sans l'existence de section) qui n'est pas un produit semi-direct.

Exercice 4.

1. Montrer que S_n s'écrit comme un produit semi-direct de deux sous-groupes stricts.
2. Montrer que l'on peut écrire le groupe dihédral D_n comme un produit semi-direct naturel.
3. Montrer que l'on peut écrire $GL_n(k)$ comme un produit semi-direct naturel (k est un corps)
4. Ces produits semi-directs sont-ils directs ?

Indication : dans chacun des cas, il conviendrait de commencer par la recherche d'un sous-groupe distingué "évident".

Exercice 5. On rappelle la définition du *produit semi-direct externe*. On suppose que sont donnés deux groupes H et K, ainsi qu'un morphisme $\alpha\colon K \to \mathrm{Aut}(H)$, qui envoie $k \in K$ à $\alpha_k \in \mathrm{Aut}(H)$. On définit $G = H \rtimes_\alpha K$ comme étant l'ensemble $H \times K$, muni de la loi suivante :

$$(h,k) \cdot_\alpha (h',k') = \big(h\alpha_k(h'), kk'\big).$$

Montrer que

- $G = H \rtimes_\alpha K = (H \times K, \cdot_\alpha)$ est bien un groupe.
- $H' = H \times \{e\}$ est un sous-groupe distingué de G. Il est d'ailleurs canoniquement isomorphe à H (comment ?)
- $K' = \{e\} \times K$ est un sous-groupe (pas forcément distingué) de G. Il est d'ailleurs canoniquement isomorphe à K (comment ?)
- $G = H' \rtimes K'$ (cette fois-ci, c'est un produit semi-direct interne).