Feuilles d'exercices 7

Exercice 1. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Déterminer, pour chaque nombre premier p, les p-Sylow de $G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Exercice 2. Spot G un groupe abélien fini, disons d'ordre n.

Pour chaque diviseur premier p de n, combien de p-Sylow admet G?

Montrer que G admet un nombre fini de sous-groupes de Sylow non-triviaux, et qu'il est isomorphe à leur produit direct.

On pourrait commencé par étudier le cas où $n = pq$, où p et q sont deux premiers distincts.

Exercice 3.

1. Soit G un groupe fini, S et S' deux sous-groupes distincts de G d'ordre premier p. Que peut-on dire de $|S \cap S'|$?

2. Dénombrer les éléments d'ordre 3 et 5 de S_5. En déduire le nombre de 3-Sylow et de 5-Sylow de S_5.

Exercice 4. Soit G le groupe $GL_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ avec p premier.

1. Rappeler le calcul de l'ordre de G.

2. Montrer que la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
est d'ordre p et que $\langle A \rangle$ est un p-Sylow de G.

3. En déduire que toute matrice $M \in G$ d'ordre p est conjuguée à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. En vous servant de l'action par conjugaison de G sur l'ensemble $\mathscr{S}(p)$ de ses p-Sylow, montrer que $|\mathscr{S}(p)| = p + 1$.

5. En déduire qu'il y a $p^2 - 1$ éléments d'ordre p dans G.

Exercice 5.

1. Soit G un groupe fini, S et S' deux sous-groupes de G avec S distingué et
$$\mathrm{pgcd}\big(|S|, |S'|\big) = 1.$$
Que peut-on dire de $|S \cap S'|$ et de $|SS'|$?

2. Faire la liste des groupes d'ordre 15 à isomorphisme près. *(Commencer par compter les sous-groupes de Sylow)*

Remarque. C'est un cas particulier d'un théorème de cours sur les groupes G d'ordre pq avec $p < q$ premiers.

Exercice 6. Un groupe G est dit *simple* s'il n'admet pas de sous-groupes distingués hormis G lui-même et $\{e\}$. Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 7 dans un groupe simple d'ordre 168? *(Utiliser le nombre de 7-Sylow)*

Exercice 7.

1. Montrer que si G est un groupe d'ordre 45 alors G est abélien. *(Argument identique à celui de l'exercice 5)*

2. Plus généralement, montrer que tout groupe G d'ordre p^2q avec p, q premiers, $p < q$ et $q \not\equiv 1 \mod p$, est abélien.

Exercice 8. Soient $p < q < r$ trois nombres premiers et G un groupe d'ordre pqr. Pour $s \in \{p, q, r\}$, on note N_s le nombre de $s-$ Sylow de G.

1. Montrer que $N_q(q-1) + N_r(r-1) \leq pqr - 1$.

2. Montrer que $N_r = 1$ ou $N_r = pq$.

3. Montrer que $N_q = 1$ ou $N_q \geq r$.

4. En déduire que $N_q = 1$ ou $N_r = 1$ et donc que G n'est pas un groupe simple.