



Pour cocher une case, mettez une croix avec un stylo bleu ou noir : ☒. Si vous utilisez du blanc pour modifier une réponse, NE REDESSINEZ PAS la case vide !

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre → et écrivez votre nom et prénom ci-dessous :

Nom et prénom : .....

Attention à ne pas vous tromper, toute erreur invalide la copie !

Grid of 8x10 boxes for student ID and name coding.

### Groupes et géométrie — CC1 — 8 octobre 2020

Règlement – L'épreuve dure une heure. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Il n'est admis de consulter aucun document.

Le sujet comporte deux parties, de poids égal.

Dans chaque partie, les poids des questions sont égaux.

Une mauvaise réponse pourrait vous faire perdre des points. Ne répondez que si vous êtes (suffisamment) sûrs de votre réponse.

### Partie I

#### Question 1

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Soit  $G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , et  $*$  l'addition modulo  $n$ . Lequel est vrai ?

- Four multiple-choice options regarding the group structure of (G, \*).

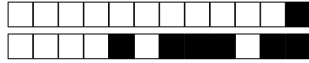
#### Question 2

Soit  $G = \mathbf{R}$ , et  $*$  l'opération

$$x * y = xy + x + y.$$

Lequel est vrai ?

- Three multiple-choice options regarding the group structure of (G, \*).

**Question 3**

Soit  $G = [0, 1[$ . On définit deux opérations sur  $G$  :

$$x * y = \begin{cases} x + y & \text{si } x + y < 1, \\ x + y - 1 & \text{si } x + y \geq 1. \end{cases}$$

$$x \odot y = \begin{cases} xy & \text{si } xy < 1, \\ xy - 1 & \text{si } xy \geq 1. \end{cases}$$

- $(G, \odot)$  et  $(G, *)$  sont des groupes
- $(G, \odot)$  est un groupe,  $(G, *)$  ne l'est pas
- $(G, *)$  est un groupe,  $(G, \odot)$  ne l'est pas
- Ni  $(G, *)$  ni  $(G, \odot)$  n'est un groupe

**Question 4**

Soit  $G = \{1, -1, i, -i\} \subseteq \mathbf{C}$ , et  $*$  la multiplication des nombres complexes.

- $(G, *)$  n'est pas un groupe
- $(G, *)$  est un groupe monogène
- $(G, *)$  est un groupe non monogène

**Question 5**

Soit  $G = \{1, (1\ 4), (2\ 3), (1\ 4)(2\ 3)\} \subseteq S_4$ , muni de la composition de permutations.

- $(G, *)$  est un groupe monogène
- $(G, *)$  est un groupe non monogène
- $(G, *)$  n'est pas un groupe

**Question 6**

Soit  $G_1 = \text{GL}(2, \mathbf{R})$ , le groupe des matrices inversibles  $2 \times 2$  à coefficients réels, muni de la loi du produit de matrices. Soit  $G_2 = \text{GL}(3, \mathbf{R})$  (pareil, mais  $3 \times 3$ ). Soit

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

$$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

- $H_1$  est un sous sous-groupe de  $G_1$  et  $H_2$  n'est pas un sous-groupe de  $G_2$
- $H_1$  est un sous sous-groupe de  $G_1$  et  $H_2$  est un sous-groupe de  $G_2$
- $H_1$  n'est pas un sous sous-groupe de  $G_1$  et  $H_2$  n'est pas un sous-groupe de  $G_2$
- $H_1$  n'est pas un sous sous-groupe de  $G_1$  et  $H_2$  est un sous-groupe de  $G_2$

**Question 7**

Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R} \right\}$$

et soit  $*$  la multiplication de matrices.

- $(G, *)$  est un groupe abélien  
  $(G, *)$  n'est pas un groupe  
  $(G, *)$  est un groupe non abélien

**Question 8**Soit  $G = (\mathbf{R}, +)$ . Soit  $H = \text{GL}(2, \mathbf{R})$ , le groupe des matrices  $2 \times 2$  à coefficients réels, muni du produit de matrices.L'application  $\varphi: G \rightarrow H$ , définie par  $\varphi(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$  est-elle un morphisme de groupes?

- Non.  
 Oui.

**Question 9**Soit  $G = (\mathbf{R}, +)$ . Soit  $H = \text{GL}(2, \mathbf{R})$ , le groupe des matrices  $2 \times 2$  à coefficients réels, muni du produit de matrices.L'application  $\varphi: G \rightarrow H$ , définie par  $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$  est-elle un morphisme de groupes?

- Non.  
 Oui.

**Question 10**Soit  $H = \text{GL}(2, \mathbf{R})$ , le groupe des matrices  $2 \times 2$  à coefficients réels, muni du produit de matrices.L'application  $\varphi: H \rightarrow (\mathbf{R}^\times, \cdot)$ , définie par  $\varphi(A) = \det(A)$  est-elle un morphisme de groupes?

- Non.  
 Oui.



## Partie II

### Question 11

Soit  $G = S_5$ , et soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

L'ordre de  $\sigma$  est (indication : calculer sa décomposition en produit de cycles disjoints) :

- 1
- 4
- 6
- 3

### Question 12

Soit  $G = S_5$ , et soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Est-il possible d'exprimer  $\sigma$  comme produit de  $n$  transpositions? (Exactement l'une des possibilités suivantes est valide)

- Ce n'est possible pour aucun  $n$ .
- Il existe  $n$  impair tel que c'est possible.
- Il existe  $n$  pair tel que c'est possible.

### Question 13

Soit  $G = S_5$ , et soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer  $\sigma^{33}$  (indication : calculer d'abord la décomposition en produit de cycles disjoints) :

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

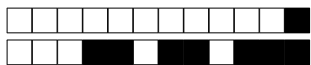


**Question 14** Soit  $G$  un groupe, et  $H, K \leq G$  deux sous-groupes. Montrer que  $H \cap K$  est un sous-groupe de  $G$ .

0  0.5  1  1.5  2  2.5  3  3.5  4  4.5  5

Répondez ici :

PROJET



PROJET