



Pour cocher une case, mettez une croix avec un stylo bleu ou noir : ☒.

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre → et écrivez votre nom et prénom ci-dessous :

Nom et prénom : .....

Grid of checkboxes for student ID digits 0-9.

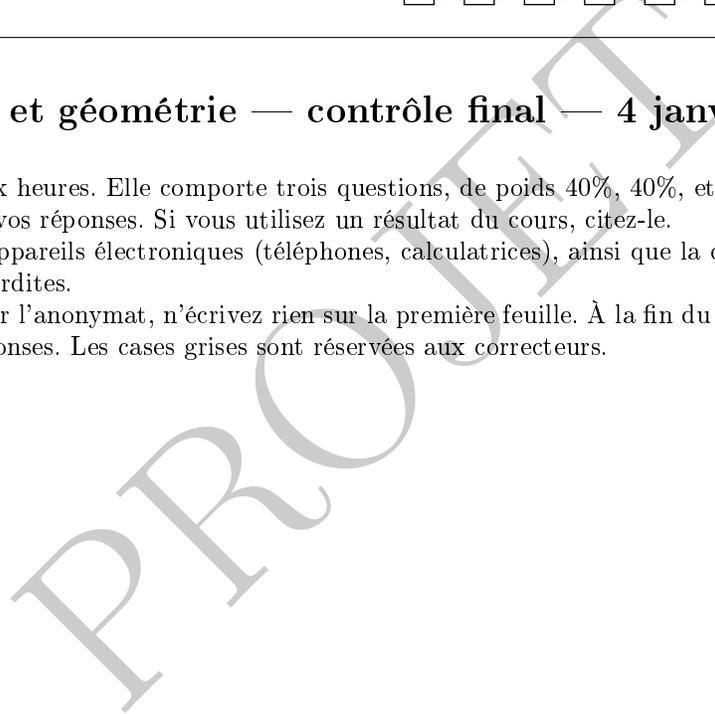
Groupes et géométrie — contrôle final — 4 janvier 2021

L'épreuve dure deux heures. Elle comporte trois questions, de poids 40%, 40%, et 20%.

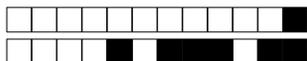
Justifiez toutes vos réponses. Si vous utilisez un résultat du cours, citez-le.

L'utilisation d'appareils électroniques (téléphones, calculatrices), ainsi que la consultation de tout document, sont interdites.

Afin de conserver l'anonymat, n'écrivez rien sur la première feuille. À la fin du contrôle, déposez-la séparément des réponses. Les cases grises sont réservées aux correcteurs.



Ne rien écrire ici.



**Ne rien écrire ici.**



**Question 1**

 0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10

Soit  $G$  un groupe d'ordre 2021.

1. Combien de 43-Sylow possède-t-il ?
2. Combien de 47-Sylow possède-t-il ?
3. Montrer que  $G$  est un groupe abélien.
4. Combien de générateurs possède-t-il ? (c'est-à-dire, combien de  $x \in G$  tel que  $G = \langle x \rangle$  ?)

PROJET



Question 1, page 2.

PROJET



## Question 2

 0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10

Soit  $G$  un groupe fini et  $X$  un ensemble non vide. Soit  $G \curvearrowright X$  une action de  $G$  sur  $X$ . On rappelle la *formule de Burnside* :

$$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|,$$

où  $\Omega$  est la famille des orbites de l'action  $G \curvearrowright X$ , et  $\text{Fix}(g)$  est l'ensemble des *points fixes* de  $g$  :

$$\text{Fix}(g) = \{x \in X : gx = x\}.$$

On rappelle également que l'action  $G \curvearrowright X$  est *transitive* si pour tous  $x, y \in X$  il existe  $g \in G$  tel que  $y = gx$ .

1. Montrer que l'action  $G \curvearrowright X$  est transitive si et seulement si elle admet exactement une orbite.
2. Montrer que si  $G \curvearrowright X$  est une action transitive et  $|X| \geq 2$ , alors il existe  $g \in G$  agissant sans point fixe (c'est à dire, tel que  $\text{Fix}(g) = \emptyset$ ).
3. Soit  $H \leq G$  un sous-groupe, et considérons l'action par translation  $G \curvearrowright G/H$ , définie par

$$f \cdot (gH) = fgH.$$

Cette action est-elle transitive ?

4. Montrer que pour  $f, g \in G$  :

$$fgH = gH \iff f \in gHg^{-1}.$$

5. Dédurre que si  $H < G$  est un sous-groupe *strict* (c'est à dire, distinct de  $G$ ), alors

$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$



Question 2, page 2.

PROJET



Question 2, page 3.

PROJET



Question 2, page 4.

PROJET



**Question 3**

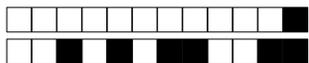
0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10

Soit  $G$  un groupe. On rappelle que le *commutateur* de  $x, y \in G$  est :

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Montrer que si  $H \leq G$  et  $[x, y] \in H$  pour toute paire  $x, y \in G$ , alors  $H \trianglelefteq G$ , et  $G/H$  est abélien.

PROJET



Question 3, suite.

PROJET