Pour cocher une case, mettez une croix avec un stylo bleu ou noir : ☒.

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre ⟶ et écrivez votre nom et prénom ci-dessous :

Nom et prénom : ....

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Groupes et géométrie — contrôle final — 4 janvier 2021

L'épreuve dure deux heures. Elle comporte trois questions, de poids 40%, 40%, et 20%.

Justifiez toutes vos réponses. Si vous utilisez un résultat du cours, citez-le.

L'utilisation d'appareils électroniques (téléphones, calculatrices), ainsi que la consultation de tout document, sont interdites.

Afin de conserver l'anonymat, n'écrivez rien sur la première feuille. À la fin du contrôle, déposez-là séparément des réponses. Les cases grises sont réservées aux correcteurs.

Ne rien écrire ici.

Ne rien écrire ici.

Question 1 □0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9 □10

Soit G un groupe d'ordre 2021.

1. Combien de 43-Sylow possède-t-il ?
2. Combien de 47-Sylow possède-t-il ?
3. Montrer que G est un groupe abélien.
4. Combien de générateurs possède-t-il ? (c'est-à-dire, combien de $x \in G$ tel que $G = \langle x \rangle$?)

Question 1, page 2.

Question 2 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

Soit G un groupe fini et X un ensemble non vide. Soit $G \curvearrowright X$ une action de G sur X. On rappelle la *formule de Burnside* :

$$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}(g)|,$$

où Ω est la famille des orbites de l'action $G \curvearrowright X$, et $\operatorname{Fix}(g)$ est l'ensemble des *points fixes* de g :

$$\operatorname{Fix}(g) = \{x \in X : gx = x\}.$$

On rappelle également que l'action $G \curvearrowright X$ est *transitive* si pour tous $x, y \in X$ il existe $g \in G$ tel que $y = gx$.

1. Montrer que l'action $G \curvearrowright X$ est transitive si et seulement si elle admet exactement une orbite.
2. Montrer que si $G \curvearrowright X$ est une action transitive et $|X| \geq 2$, alors il existe $g \in G$ agissant sans point fixe (c'est à dire, tel que $\operatorname{Fix}(g) = \emptyset$).
3. Soit $H \leq G$ un sous-groupe, et considérons l'action par translation $G \curvearrowright G/H$, définie par
$$f \cdot (gH) = fgH.$$
Cette action est-elle transitive ?
4. Montrer que pour $f, g \in G$:
$$fgH = gH \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \in gHg^{-1}.$$
5. Déduire que si $H < G$ est un sous-groupe *strict* (c'est à dire, distinct de G), alors
$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

Question 2, page 2.

Question 2, page 3.

Question 2, page 4.

Question 3 □0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9 □10

Soit G un groupe. On rappelle que le *commutateur* de $x, y \in G$ est :

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Montrer que si $H \leq G$ et $[x, y] \in H$ pour toute paire $x, y \in G$, alors $H \trianglelefteq G$, et G/H est abélien.

Question 3, suite.