Université Claude Bernard Lyon I

Licence troisième année : Topologie et équations différentielles

Lundi 7 novembre 2016

# Partiel topologie et équations différentielles

—

**Durez : 1H30. Aucun document n'est autorisé**
**Cette épreuve comporte 3 exercices de poids égal**

**Exercice 1** (Question du cours). Soit $f_n, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (pour $n \in \mathbf{N}$) des fonctions telles que chaque $f_n$ est continue et $f_n \to g$ uniformément. Montrer que $g$ est continue.

**Correction.** Il faut montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q. pour tout $y \in \mathbf{R}$, si $|x-y| < \delta$ alors $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Soit donc $x \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$.

Par hypothèse : I. Il existe $N$ tel que pour tout $n \geq N$ et $z \in \mathbf{R}$ : $|f_n(z) - g(z)| < \varepsilon$. Ceci est vrai en particulier pour $n = N$. II. Puisque $f_N$ est continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbf{R}$ : si $|x-y| < \delta$ alors $|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $y \in \mathbf{R}$, si $|x-y| < \delta$ alors

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - g(y)| < 3\varepsilon.$$

Ceci conclut la preuve.

**Exercice 2.** Soit $n \geq 1$. On munit $\mathbf{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Pour $a = (a_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbf{R}^n$, on définit

$$\begin{array}{rccl} T_a : & \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & T_a(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_k, \quad \text{si } x = (x_k)_{1 \leq k \leq n}. \end{array}$$

1. Justifier (rapidement) que $T_a$ est une application linéaire continue sur $\mathbf{R}^n$.
2. Calculer sa norme.

**Correction.** On sait déjà que tout fonction de cette forme est linéaire. Elle est continue car tout application linéaire sur un espace vectoriel normé *de dimension finie* est continue.

Pour tout $x$ on a :

$$|T_a(x)| = |\sum a_k x_k| \leq \sum |a_k||x_k| \leq \|x\|_\infty \sum |a_k| \leq \|a\|_1 \|x\|_\infty.$$

Ainsi, $\|T_a\| \leq \|a\|_1$. Pour constater qu'il y a égalité, posons $x_k = 1$ si $a_k \geq 0$ et $x_k = -1$ si $a_k < 0$. Alors $\|x\|_\infty = 1$ et

$$|T_a(x)| = \sum |a_k| = \|a\|_1.$$

Ainsi :

$$\|T_a\| = \sup\big\{|T_a(x)| : \|x\|_\infty = 1\big\} = \|a\|_1.$$

**Exercice 3.** On rappelle que

$$\ell^\infty = \{f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R} \text{ t.q. } \|f\|_\infty < \infty\},$$

muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et que c'est un espace complet.

On définit

$$c = \{f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R} \text{ t.q. la suite } (f(n)) \text{ converge lorsque } n \to \infty\}$$

1. Montrer que $c \subset \ell^\infty$.
2. Montrer que $(c, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

**Correction.** On devrait déjà savoir que dans $\mathbf{R}$ tout suite convergente est bornée. On a d'ailleurs vu en cours que dans tout espace métrique, tout suite convergente est de Cauchy, et toute suite de Cauchy est bornée. Ainsi, $c \subseteq \ell^\infty$.

Pour voir que c'est un Banach, il faut vérifier que c'est un espace vectoriel normé complet.

I. Espace vectoriel : il suffit de montrer que $c$ est un s.e.v. de $\ell^\infty$. En effet, si $f, g \in c$, disons $f(n) \to a$ et $g(n) \to b$, alors $(f + \lambda g)(n) = f(n) + \lambda g(n) \to a + \lambda b$. Ainsi $f + \lambda g \in c$, c'est donc bien un s.e.v.

II. Normé : la restriction d'une norme (ici, $\|\cdot\|_\infty$) d'un e.v. (ici, $\ell^\infty$) à un s.e.v. (ici, $c$) est toutjours une norme sur le s.e.v. En cours on faisait ça presque toujours implicitement, on peut donc omettre cette étape.

III. Complet : puisque $\ell^\infty$ est complet, $c$ est complet ssi il est fermé dans $\ell^\infty$. Montrons donc que $c$ est fermé. Supposons donc que $f_k \to g$ dans $\ell^\infty$, avec $f_k \in c$, et montrons que $g \in c$. Pour cela, il faut montrer que $g(n)$ converge. Et pour cela, il faut trouver sa limite.

D'abord, pour chaque $k$ posons $a_k = \lim_{n\to\infty} f_k(n)$ : la limite existe puisque $f_k \in c$. L'idée est que $\lim_{n\to\infty} g(n)$ serait égale à $\lim_{k\to\infty} a_k$. La toute première étape serait do montrer donc que $(a_k)$ converge.

Pour chaque $\varepsilon > 0$ existe $K_\varepsilon$ tq $k \geq K_\varepsilon$ implique $\|f_k - g\|_\infty < \varepsilon$, . Pour chaque $k$ il existe également $N_{k,\varepsilon}$ (qui dépend de $k$ et de $\varepsilon$) tq $n \geq N_{k,\varepsilon}$ implique $\|f_k(n) - a_k\| < \varepsilon$.

Ainsi on a :

(*) Si $k \geq K_\varepsilon$ et $n \geq N_{k,\varepsilon}$ alors

$$|a_k - g(n)| \leq |a_k - f_k(n)| + |f_k(n) - g(n)| < 2\varepsilon.$$

D'abord, ceci signifie que si $k, \ell \geq K$ et $n = \max N_k, N_\ell$ :

$$|a_k - a_\ell| \leq |a_k - g(n)| + |a_\ell - g(n)| < 4\varepsilon.$$

Ainsi nous avons démontré que la suite $(a_k)$ est de Cauchy, elle doit donc converger dans $\mathbf{R}$ qui est complet. Soit $b = \lim a_k$.

Maintenant, montrons que $g(n) \to b$. En effet, pour $\varepsilon > 0$ il existe $k \geq K_\varepsilon$ t.q. on ait aussi $|b - a_k| < \varepsilon$. Fixons ce $k$. Alors pour tout $n \geq N_{k,\varepsilon}$ :

$$|g(n) - b| \leq |g(n) - a_k| + |a_k - b| < 3\varepsilon.$$

Ainsi la suite $g(n)$ converge, donc $g \in c$, donc $c$ est fermé dans $\ell^\infty$, donc $c$ est complet.

**Exercice 4** (Distance de Hausdorff)**.** Soit $X$ la famille des parties fermées non vides de $[0,1]$. Pour $A, B \in X$ (c.à.d., $A, B \subseteq [0,1]$ fermés), on pose :

$$d_H(A, B) = \max\left(\sup_{x\in A} d(x, B), \sup_{y\in B} d(y, A)\right).$$

1. Pour $a, b \in [0,1]$, calculer $d_H\big(\{a\},\{b\}\big)$.
2. Calculer $d_H\big(\{1/2\},[0,1]\big)$.
3. Montrer que $d_H$ est bien une distance sur $X$.
   Pour l'inégalité triangulaire, on pourra commencer en montrant que si $A, B, C \in X$ et $x \in A$, $y \in B$, alors :

$$d(x,C) \leq d(x,y) + \sup_{z\in B} d(z,C).$$

**Correction.** On se rappelle que $d(x,C) = \inf_{y\in C} d(x,y)$.
(i)

$$d(x,\{b\}) = d(x,b) = |x-b|$$
$$\sup_{x\in\{a\}} d(x,\{b\}) = |a-b|$$
$$d_H(\{a\},\{b\}) = \max |a-b|, |b-a| = |a-b|.$$

(ii) Pour tout $x \in [0,1]$ : $d(x,[0,1]) = 0$ et $d(x,\{1/2\}) = |x-1/2|$. Ainsi

$$\sup_{x\in\{1/2\}} d(x,[0,1]) = 0$$
$$\sup_{x\in[0,1]} d(x,\{1/2\}) = \sup_{x\in[0,1]} |x-1/2| = 1/2$$
$$d_H(\{1/2\},[0,1]) = \max 0, 1/2 = 1/2.$$

(iii) Montrons que c'est une distance.
Positive : puisque $d$ est positive, on a $d(x,A) \geq 0$ pour tout $x$ et $A$, ce qui fait que $d_H(A,B) \geq 0$.
$d_H(A,A) = 0$ : En effet, si $x \in A$ alors $d(x,A) = 0$. Ainsi $\sup_{x\in A} d(x,A) = 0$, donc $d_H(A,A) = \max 0, 0 = 0$.
Si $d_H(A,B) = 0$ : Montrons la double inclusion. En effet, SI $x \in A$ alors $0 \leq d(x,B) \leq d_H(A,B) = 0$. Donc $d(x,B) = 0$, donc $x \in \overline{B} = B$. Ainsi $A \subseteq B$. L'inclusion $B \subseteq A$ se démontre de la même manière.
Symétrique : facile (mais il faudrait quand même l'écrire !)
Inégalité triangulaire. D'abord, l'indication : si $y \in B$ alors

$$\begin{aligned} d(x,y) + \sup_{z\in B} d(z,C) &\geq d(x,y) + d(y,C) \\ = d(x,y) + \inf_{w\in C} d(y,w) &= \inf_{w\in C}\big[d(x,y) + d(y,w)\big] \\ &\geq \inf_{w\in C} d(x,w) = d(x,C) \end{aligned}$$

Puisque c'est vrai pour tout $y \in B$ :

$$d(x,C) \leq \inf_{y\in B} d(x,y) + \sup_{z\in B} d(z,C) = d(x,B) + \sup_{z\in B} d(z,C).$$

Ainsi :

$$\sup_{x\in A} d(x,C) \leq \sup_{x\in A} d(x,B) + \sup_{z\in B} d(z,C) \leq d_H(A,B) + d_H(B,C).$$

Par symétrie on obtient également :

$$\sup_{x\in C} d(x,A) \le \sup_{x\in C} d(x,B) + \sup_{z\in B} d(z,A) \le d_H(A,B) + d_H(B,C).$$

On conclut que

$$d_H(A,C) = \max\bigl(\sup_{x\in A} d(x,C), \sup_{x\in C} d(x,A)\bigr) \le d_H(A,B) + d_H(B,C).$$