Université Claude Bernard Lyon I

Licence troisième année : Topologie et équations différentielles

Lundi 7 novembre 2016

Partiel topologie et équations différentielles

—

Durez : 1H30. Aucun document n'est autorisé
Cette épreuve comporte 3 exercices de poids égal

Exercice 1 (Question du cours)**.** Soit $f_n, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (pour $n \in \mathbf{N}$) des fonctions telles que chaque f_n est continue et $f_n \to g$ uniformément. Montrer que g est continue.

Exercice 2. Soit $n \geq 1$. On munit $\mathbf{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Pour $a = (a_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbf{R}^n$, on définit

$$\begin{array}{rrl} T_a : & \mathbf{R}^n & \longrightarrow \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto T_a(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_k, \quad \text{si } x = (x_k)_{1\leq k\leq n}. \end{array}$$

1. Justifier (rapidement) que T_a est une application linéaire continue sur $\mathbf{R}^n$.
2. Calculer sa norme.

Exercice 3. On rappelle que

$$\ell^\infty = \{f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R} \text{ t.q. } \|f\|_\infty < \infty\},$$

muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et que c'est un espace complet.

On définit

$$c = \{f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R} \text{ t.q. la suite } (f(n)) \text{ converge lorsque } n \to \infty\}$$

1. Montrer que $c \subset \ell^\infty$.
2. Montrer que $(c, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Exercice 4 (Distance de Hausdorff)**.** Soit X la famille des parties fermées non vides de $[0,1]$. Pour $A, B \in X$ (c.à.d., $A, B \subseteq [0,1]$ fermés), on pose :

$$d_H(A,B) = \max\left(\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{y\in B} d(y,A)\right).$$

1. Pour $a, b \in [0,1]$, calculer $d_H\big(\{a\},\{b\}\big)$.
2. Calculer $d_H\big(\{1/2\},[0,1]\big)$.
3. Montrer que d_H est bien une distance sur X.
   Pour l'inégalité triangulaire, on pourra commencer en montrant que si $A, B, C \in X$ et $x \in A$, $y \in B$, alors :

$$d(x,C) \leq d(x,y) + \sup_{z\in B} d(z,C).$$