Des axiomes des mathématiques à la mathématique des axiomes

Itaï Ben Yaacov

Université Claude Bernard Lyon 1

Institut Camille Jordan

2017-02-13

Outline

Le mathématicien définit des objets et démontre des théorèmes

Définition (à partir de notions déjà définies)

Un nombre premier est un entier naturel ayant exactement deux diviseurs, lui-même et 1.

Théorème (Euclide)

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration (à partir des théorèmes déjà démontrés).

Si $p_1, \ldots, p_n$ est une liste exhaustive des nombres premiers, alors $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ n'est divisible par aucun d'eux, et donc admet un facteur premier autre que $p_1, \ldots, p_n$, une contradiction. □

Le mathématicien définit des objets et démontre des théorèmes

Définition (à partir de notions déjà définies)

Un nombre premier est un entier naturel ayant exactement deux diviseurs, lui-même et 1.

Théorème (Euclide)

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration (à partir des théorèmes déjà démontrés).

Si $p_1, \dots, p_n$ est une liste exhaustive des nombres premiers, alors $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ n'est divisible par aucun d'eux, et donc admet un facteur premier autre que $p_1, \dots, p_n$, une contradiction. $\square$

Mais il faut commencer quelque part:

- Il faut des notions fondamentales (admises, non définies).
- Il faut des axiomes (« théorèmes » admis, non démontrés).

17e siècle: Isaac Newton et Gottfried Leibnitz introduisent le calcul infinitésimal

Avec la notion intuitive d'une fonction à valeurs réelles, il font des calculs tout à fait remarquables:

$$(x^2)' = 2x, \qquad \int_1^2 x\,dx = \frac{3}{2}.$$

17e siècle: Isaac Newton et Gottfried Leibnitz introduisent le calcul infinitésimal

Avec la notion intuitive d'une fonction à valeurs réelles, il font des calculs tout à fait remarquables:

$$(x^2)' = 2x, \qquad \int_1^2 x\,dx = \frac{3}{2}.$$

Mais:

- Qu'est-ce qu'une fonction ? Une formule, telle que $\sin(x^2+5)$? Une « loi » associant une valeur $f(x)$ à chaque x ?

17e siècle: Isaac Newton et Gottfried Leibnitz introduisent le calcul infinitésimal

Avec la notion intuitive d'une fonction à valeurs réelles, il font des calculs tout à fait remarquables:

$$(x^2)' = 2x, \qquad \int_1^2 x\,dx = \frac{3}{2}.$$

Mais:

- Qu'est-ce qu'une fonction ? Une formule, telle que $\sin(x^2+5)$? Une « loi » associant une valeur $f(x)$ à chaque x ?
- Quelles sont les propriétés des réels ?
- Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

19e siècle: l'univers est fait ~~d'atomes~~ d'ensembles

Définition (Richard Dedekind)

Un nombre réel est une partie initiale $C \subseteq \mathbf{Q}$ qui est non vide, majorée, sans plus grand élément.

19e siècle: l'univers est fait ~~d'atomes~~ d'ensembles

Définition (Richard Dedekind)

Un nombre réel est une partie initiale $C \subseteq \mathbf{Q}$ qui est non vide, majorée, sans plus grand élément.

Un nombre réel r est représenté par / identifié avec l'ensemble

$$\{q \in \mathbf{Q} : q < r\}.$$

Cette définition permet de <u>démontrer</u> les propriétés des nombre réels.

19e siècle: l'univers est fait ~~d'atomes~~ d'ensembles

Définition (Richard Dedekind)

Un nombre réel est une partie initiale $C \subseteq \mathbf{Q}$ qui est non vide, majorée, sans plus grand élément.

Un nombre réel r est représenté par / identifié avec l'ensemble

$$\{q \in \mathbf{Q} : q < r\}.$$

Cette définition permet de démontrer les propriétés des nombre réels.

Le entiers naturels sont aussi des ensembles

Nous pouvons identifier un entier naturel n avec l'ensemble fini

$$\{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Ainsi: $0 = \varnothing$, $1 = \{0\} = \{\varnothing\}$, $2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, ...

19e siècle: l'univers est fait ~~d'atomes~~ d'ensembles

Définition (Richard Dedekind)

Un nombre réel est une partie initiale $C \subseteq \mathbf{Q}$ qui est non vide, majorée, sans plus grand élément.

Un nombre réel r est représenté par / identifié avec l'ensemble

$$\{q \in \mathbf{Q} : q < r\}.$$

Cette définition permet de démontrer les propriétés des nombre réels.

Le entiers naturels sont aussi des ensembles

Nous pouvons identifier un entier naturel n avec l'ensemble fini

$$\{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Ainsi: $0 = \varnothing$, $1 = \{0\} = \{\varnothing\}$, $2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, ...

(Les entiers relatifs aussi, d'ailleurs. Et les rationnels.)

L'univers est fait d'ensembles (bis)

Une fonction

Une fonction $f : X \to Y$ peut être représentée par un ensemble de paires ordonnées (son graphe):

$$f = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Pour chaque $x \in X$, la valeur $f(x)$ est l'unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in f$.

L'univers est fait d'ensembles (bis)

Une fonction

Une fonction $f : X \to Y$ peut être représentée par un ensemble de paires ordonnées (son graphe):

$$f = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Pour chaque $x \in X$, la valeur $f(x)$ est l'unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in f$.

Une paire ordonnée

Pour tous deux objets a et b nous allons représenter la paire ordonnée (a, b) par un ensemble:

$$(a, b) = \{\{a, b\}, \{a\}\}$$

(Exercice: vérifier que $(a, b) = (c, d)$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$.)

L'univers (mathématique) est fait d'ensembles (ter)

- Il suffit d'une seule notion fondamentale, celle d'un ensemble. À partir de cette notion nous pouvons définir toute autre notion mathématique (nombre, fonction, limite, dérivée, ...)
- Nous ne pouvons pas définir ce qu'est un ensemble à partir de notions plus simples (car il n'y en a pas).
- Intuitivement: un ensemble A est une "collection" d'objets. Un objet a est ou bien un membre de A (noté $a \in A$), ou bien non ($a \notin A$).

L'univers (mathématique) est fait d'ensembles (ter)

- Il suffit d'une seule notion fondamentale, celle d'un ensemble. À partir de cette notion nous pouvons définir toute autre notion mathématique (nombre, fonction, limite, dérivée, ...)
- Nous ne pouvons pas définir ce qu'est un ensemble à partir de notions plus simples (car il n'y en a pas).
- Intuitivement: un ensemble A est une "collection" d'objets. Un objet a est ou bien un membre de A (noté $a \in A$), ou bien non ($a \notin A$).
- Axiome d'extensionnalité: Deux ensembles ayant les mêmes membres sont égaux. Autrement dit, pour décrire un ensemble il suffit de spécifier ses membres.

L'univers (mathématique) est fait d'ensembles (ter)

- Il suffit d'une seule notion fondamentale, celle d'un ensemble. À partir de cette notion nous pouvons définir toute autre notion mathématique (nombre, fonction, limite, dérivée, ...)
- Nous ne pouvons pas définir ce qu'est un ensemble à partir de notions plus simples (car il n'y en a pas).
- Intuitivement: un ensemble A est une "collection" d'objets. Un objet a est ou bien un membre de A (noté $a \in A$), ou bien non ($a \notin A$).
- Axiome d'extensionnalité: Deux ensembles ayant les mêmes membres sont égaux. Autrement dit, pour décrire un ensemble il suffit de spécifier ses membres.
- Tous les théorèmes mathématiques (e.g., le calcul infinitésimal) parlent d'ensembles, et peuvent être démontrés en tant que tels. Il suffit de pouvoir construire des ensembles, en décrivant leurs membres.

20e siècle: l'univers mathématique s'écroule

Bertrand Russel: « pas si vite ! »

Soit $A = \{x : x \text{ est un ensemble et } x \notin x\}$. Alors $A \in A \iff A \notin A$.

20e siècle: l'univers mathématique s'écroule

Bertrand Russel: « pas si vite ! »

Soit $A = \{x : x \text{ est un ensemble et } x \notin x\}$. Alors $A \in A \iff A \notin A$.

Réponse au paradoxe de Russel: tout ensemble est une collection, mais toute collection imaginable n'est pas forcément un ensemble.

20e siècle: l'univers mathématique s'écroule (ou presque)

Bertrand Russel: « pas si vite ! »

Soit $A = \{x : x \text{ est un ensemble et } x \notin x\}$. Alors $A \in A \Longleftrightarrow A \notin A$.

Réponse au paradoxe de Russel: tout ensemble est une collection, mais toute collection imaginable n'est pas forcément un ensemble.

Les axiomes de Zermelo-Fraenkel (ZF)

L'axiome d'extensionnalité, plus une liste de conditions suffisantes pour qu'une collection soit un ensemble. Par exemple:

- Axiome de compréhension: si x et un ensemble et P est une propriété alors
$$\{t : t \in x \text{ et } P(t)\}$$
(la collection des membres de x vérifiant P) est un ensemble.
- Axiome de l'infini: la collection des entiers naturels est un ensemble.
- ...

Et les mathématiques sont finalement bien fondées

Le système d'axiomes de ZF sert de fondement pour les mathématiques:

- Tous les objets qui nous intéressent (nombres, espaces vectoriels, groupe de Lie, ...) sont des ensembles (d'ensembles...)
- Tous les théorèmes sont démontrés (ou peuvent l'être) à partir des axiomes ZF (ou ZFC = ZF + Choix).

Et les mathématiques sont finalement bien fondées (???)

Le système d'axiomes de ZF sert de fondement pour les mathématiques:

- Tous les objets qui nous intéressent (nombres, espaces vectoriels, groupe de Lie, ...) sont des ensembles (d'ensembles...)
- Tous les théorèmes sont démontrés (ou peuvent l'être) à partir des axiomes ZF (ou ZFC = ZF + Choix).

Sauf que...

Qui nous garantit que le système ZF n'est pas paradoxal ?

Et les mathématiques sont finalement bien fondées (???)

Le système d'axiomes de ZF sert de fondement pour les mathématiques:

- Tous les objets qui nous intéressent (nombres, espaces vectoriels, groupe de Lie, ...) sont des ensembles (d'ensembles...)
- Tous les théorèmes sont démontrés (ou peuvent l'être) à partir des axiomes ZF (ou ZFC = ZF + Choix).

Sauf que...

Qui nous garantit que le système ZF n'est pas paradoxal ?

Personne. Et personne ne peut y remédier.

Outline

Quelques questions assez naturelles

Question

Le système d'axiomes ZF est-il cohérent (non-contradictoire) ?
Est-il complet ? Peut-on démontrer tout ce qui est « vrai » à partir de ZF ?

Quelques questions assez naturelles

Question

Le système d'axiomes ZF est-il cohérent (non-contradictoire) ?
Est-il complet ? Peut-on démontrer tout ce qui est « vrai » à partir de ZF ?

Pour simplifier, remplaçons l'univers des ensembles $(V, \in)$ par « l'arithmétique », c'est à dire $(\mathbf{N}, \leq, +, \cdot)$ (on se restreint aux entiers naturels, que l'on sait additionner, multiplier, et comparer).

Quelques questions assez naturelles

Question

Le système d'axiomes ZF est-il cohérent (non-contradictoire) ?
Est-il complet ? Peut-on démontrer tout ce qui est « vrai » à partir de ZF ?

Pour simplifier, remplaçons l'univers des ensembles $(V, \in)$ par « l'arithmétique », c'est à dire $(\mathbf{N}, \leq, +, \cdot)$ (on se restreint aux entiers naturels, que l'on sait additionner, multiplier, et comparer).
On se donne un système d'axiomes (l'arithmétique de Peano, PA):

- $x + 0 = x, \quad x + (y+1) = (x+y) + 1.$
- $x \cdot 0 = 0, \quad x(y+1) = xy + x.$
- ...
- Récurrence: pour une propriété P, si $P(0)$ est vrai, et si $P(x)$ implique $P(x+1)$, alors $P(x)$ est vrai pour tout x.

Quelques questions assez naturelles

Question

Le système d'axiomes ZF est-il cohérent (non-contradictoire) ?
Est-il complet ? Peut-on démontrer tout ce qui est « vrai » à partir de ZF ?

Pour simplifier, remplaçons l'univers des ensembles $(V, \in)$ par « l'arithmétique », c'est à dire $(\mathbf{N}, \leq, +, \cdot)$ (on se restreint aux entiers naturels, que l'on sait additionner, multiplier, et comparer).
On se donne un système d'axiomes (l'arithmétique de Peano, PA):

- $x + 0 = x, \quad x + (y + 1) = (x + y) + 1.$
- $x \cdot 0 = 0, \quad x(y + 1) = xy + x.$
- ...
- Récurrence: pour une propriété P, si $P(0)$ est vrai, et si $P(x)$ implique $P(x + 1)$, alors $P(x)$ est vrai pour tout x.

Question

Le système d'axiomes PA est-il cohérent ?
Peut-on démontrer tous les énoncés arithmétiques vrais à partir de PA ?

Kurt Gödel (années 1930): quelques réponses assez surprenantes

- Le système d'axiomes PA est-il cohérent ?
  Espérons ne jamais connaître la réponse.

Kurt Gödel (années 1930): quelques réponses assez surprenantes

- Le système d'axiomes PA est-il cohérent ?
  Espérons ne jamais connaître la réponse.
- PA est-il complet ? Peut-on démontrer tous les énoncés arithmétiques vrais à partir de PA ?
  Non, et des axiomes supplémentaires ne vont pas y remédier.

Kurt Gödel (années 1930): quelques réponses assez surprenantes

- Le système d'axiomes PA est-il cohérent ?
  Espérons ne jamais connaître la réponse.
- PA est-il complet ? Peut-on démontrer tous les énoncés arithmétiques vrais à partir de PA ?
  Non, et des axiomes supplémentaires ne vont pas y remédier.

Remarque

Nous pouvons coder toutes les mathématiques dans la théorie des ensembles (ZF).
D'une manière analogue, on peut coder des notions mathématiques finies, telles que « énoncé » et « preuve », dans l'arithmétique (c'est ce que nous faisons quotidiennement avec les ordinateurs).

Premier théorème d'incomplétude de Gödel (encourageant)

Théorème

Si PA est cohérent, alors PA n'est pas complet.

Premier théorème d'incomplétude de Gödel (encourageant)

Théorème

Si PA est cohérent, alors PA n'est pas complet.
Pire: si PA' consiste en PA + de nouveaux axiomes (que l'on ait oubliés ?), et si PA' est cohérent, alors PA' n'est pas complet non plus.

Premier théorème d'incomplétude de Gödel (encourageant)

Théorème

Si PA est cohérent, alors PA n'est pas complet.
Pire: si PA' consiste en PA + de nouveaux axiomes (que l'on ait oubliés ?), et si PA' est cohérent, alors PA' n'est pas complet non plus.

Démonstration.

On écrit un énoncé φ qui dit « je ne suis pas démontrable à partir de PA' ».

- Si φ est faux: alors on ne peut pas le démontrer, donc il est vrai.
- Donc φ est vrai. Et on ne peut pas le démontrer. □

Premier théorème d'incomplétude de Gödel (encourageant)

Théorème

Si PA est cohérent, alors PA n'est pas complet.
Pire: si PA' consiste en PA + de nouveaux axiomes (que l'on ait oubliés ?), et si PA' est cohérent, alors PA' n'est pas complet non plus.

Démonstration.

On écrit un énoncé φ qui dit « je ne suis pas démontrable à partir de PA' ».

- Si φ est faux: alors on ne peut pas le démontrer, donc il est vrai.
- Donc φ est vrai. Et on ne peut pas le démontrer. $\square$

Corollaire

Moralement, ZF = PA + plein d'autres axiomes. Si ZF est cohérent, alors ZF n'est pas complet.

Corollaire

Impossible de décider par un algorithme si un énoncé est vrai ou faux dans $(\mathbf{N}, \leq, +, \cdot)$.

Second théorème d'incomplétude de Gödel (décourageant)

Soit A un système d'axiomes dans lequel « on peut faire de l'arithmétique » (par exemple: PA, ZF, éventuellement avec des axiomes supplémentaires).
Considérons l'énoncé « A est cohérent »:

$$\neg\exists x(x \text{ est une preuve de } 0 = 1 \text{ à partir de } A).$$

Théorème

Si A est cohérent, alors « A est cohérent » n'est pas démontrable à partir de A.

Second théorème d'incomplétude de Gödel (décourageant)

Soit A un système d'axiomes dans lequel « on peut faire de l'arithmétique » (par exemple: PA, ZF, éventuellement avec des axiomes supplémentaires). Considérons l'énoncé « A est cohérent »:

$$\neg\exists x(x \text{ est une preuve de } 0 = 1 \text{ à partir de } A).$$

Théorème

Si A est cohérent, alors « A est cohérent » n'est pas démontrable à partir de A.

Contraposée: si on peut démontrer à partir de A, que A est cohérent, c'est que A est contradictoire!

Second théorème d'incomplétude de Gödel (décourageant)

Soit A un système d'axiomes dans lequel « on peut faire de l'arithmétique » (par exemple: PA, ZF, éventuellement avec des axiomes supplémentaires).
Considérons l'énoncé « A est cohérent »:

$$\neg\exists x(x \text{ est une preuve de } 0 = 1 \text{ à partir de } A).$$

Théorème

Si A est cohérent, alors « A est cohérent » n'est pas démontrable à partir de A.

Contraposée: si on peut démontrer à partir de A, que A est cohérent, c'est que A est contradictoire!

- Nous espérons donc que l'on ne trouve jamais une preuve (implicitement: utilisant les axiomes de ZF) que ZF est cohérent. Ni que ZF est contradictoire, d'ailleurs.
- ZF implique que PA est cohérent: mais si ZF n'est pas cohérent… ?

Second théorème d'incomplétude de Gödel (décourageant)

Soit A un système d'axiomes dans lequel « on peut faire de l'arithmétique » (par exemple: PA, ZF, éventuellement avec des axiomes supplémentaires). Considérons l'énoncé « A est cohérent »:

$$\neg\exists x(x \text{ est une preuve de } 0 = 1 \text{ à partir de } A).$$

Théorème

Si A est cohérent, alors « A est cohérent » n'est pas démontrable à partir de A.

Contraposée: si on peut démontrer à partir de A, que A est cohérent, c'est que A est contradictoire!

- Nous espérons donc que l'on ne trouve jamais une preuve (implicitement: utilisant les axiomes de ZF) que ZF est cohérent. Ni que ZF est contradictoire, d'ailleurs.
- ZF implique que PA est cohérent: mais si ZF n'est pas cohérent... ?
- Nous croyons (après plus d'un siècle) que ZF est cohérent.
- Nous croyons encore plus fort que PA est cohérent.

Vers où ?

Chercher un niveau égal

Même si on ne peut pas démontrer que ZF est cohérent, on peut démontrer des théorèmes de cohérence relative:

- Si ZF est cohérent alors ZFC ; ZF+¬C ; ZF+CH ; ZF+¬CH sont également cohérent. C et CH sont indépendants de ZF.

Vers où ?

Chercher un niveau égal

Même si on ne peut pas démontrer que ZF est cohérent, on peut démontrer des théorèmes de cohérence relative:

- Si ZF est cohérent alors ZFC ; ZF+$\neg$C ; ZF+CH ; ZF+$\neg$CH sont également cohérent. C et CH sont indépendants de ZF.

Chercher plus haut: existence de grand cardinaux

On peut ajouter des « axiomes manquant » de la forme « il existe un cardinal qui est tellement grand, que... »
L'existence d'une grand cardinal implique que ZF est cohérent.

- Exercice: pourquoi un théorème de cohérence relative de ZF et de ZF+$\exists$grd.card. n'est pas possible ?

Vers où ?

Chercher un niveau égal

Même si on ne peut pas démontrer que ZF est cohérent, on peut démontrer des théorèmes de cohérence relative:

- Si ZF est cohérent alors ZFC ; ZF+$\neg$C ; ZF+CH ; ZF+$\neg$CH sont également cohérent. C et CH sont indépendants de ZF.

Chercher plus haut: existence de grand cardinaux

On peut ajouter des « axiomes manquant » de la forme « il existe un cardinal qui est tellement grand, que... »
L'existence d'une grand cardinal implique que ZF est cohérent.

- Exercice: pourquoi un théorème de cohérence relative de ZF et de ZF+$\exists$grd.card. n'est pas possible ?

Chercher plus bas

Et si on considérait des systèmes d'axiomes dans lesquels on ne peut pas « faire de l'arithmétique » ?

Outline

La théories des modèles: l'étude des systèmes d'axiomes et de leurs modèles

Exemple

La structure $(\mathbf{R}, \leq, +, \cdot)$.

Question

Peut-on lui trouver un système d'axiomes complet ?

La théories des modèles: l'étude des systèmes d'axiomes et de leurs modèles

Exemple

La structure $(\mathbf{R}, \leq, +, \cdot)$.

Question

Peut-on lui trouver un système d'axiomes complet ?
OUI (contrairement à $(\mathbf{N}, \leq, +, \cdot)$).

Théorème (Alfred Tarski 1951)

La théorie des corps réels clos (RCF) élimine les quantificateurs.

La théorie des corps réel clos: un système d'axiomes pour $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot)$

Définition

Un corps réel clos est un corps $(K, +, \cdot)$ (on peut additionner, multiplier, soustraire, diviser) qui est un modèle des (= qui vérifie les) axiomes suivants:

- -1 n'est pas une somme de carrés.
- Tout polynôme de degré impair admet une racine.
- Pour tout x: si x n'est pas un carré alors $-x$ l'est.

Un corps réel clos peut être muni d'un ordre: $x \leq y$ si $y - x$ est un carré.

La théorie des corps réel clos: un système d'axiomes pour $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot)$

Définition

Un corps réel clos est un corps $(K, +, \cdot)$ (on peut additionner, multiplier, soustraire, diviser) qui est un modèle des (= qui vérifie les) axiomes suivants:

- -1 n'est pas une somme de carrés.
- Tout polynôme de degré impair admet une racine.
- Pour tout x: si x n'est pas un carré alors $-x$ l'est.

Un corps réel clos peut être muni d'un ordre: $x \leq y$ si $y - x$ est un carré.

Théorème (Alfred Tarski 1951)

Dans un corps réel clos $(K, \leq, +, \cdot)$, toute propriété de premier ordre peut être exprimée sans quantificateurs.

Exemple

La propriété « x est un carré »:

$$\exists y \, (y^2 = x)$$

La théorie des corps réel clos: un système d'axiomes pour $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot)$

Définition

Un corps réel clos est un corps $(K, +, \cdot)$ (on peut additionner, multiplier, soustraire, diviser) qui est un modèle des (= qui vérifie les) axiomes suivants:

- -1 n'est pas une somme de carrés.
- Tout polynôme de degré impair admet une racine.
- Pour tout x: si x n'est pas un carré alors $-x$ l'est.

Un corps réel clos peut être muni d'un ordre: $x \leq y$ si $y - x$ est un carré.

Théorème (Alfred Tarski 1951)

Dans un corps réel clos $(K, \leq, +, \cdot)$, toute propriété de premier ordre peut être exprimée sans quantificateurs.

Exemple

La propriété « x est un carré »:

$$\exists y\, (y^2 = x) \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 0$$

Décidabilité de $(\mathbf{R}, \leq, +, \cdot)$

Corollaire

Il existe un algorithme qui décide, pour chaque énoncé (de premier ordre), s'il est vrai ou non dans $(\mathbf{R}, \leq, +, \cdot)$.

Démonstration.

On trouve un énoncé sans quantificateur équivalent, et on vérifie facilement si ce dernier est vrai ou non (pas compliqué de tester si $5 \cdot 17 \leq 19 - 3$) □

$\Longrightarrow$ « réponse » à Gödel: un îlot de compréhension complète.

Structures et théories o-minimales

Corollaire

Soit $(\mathcal{R}, \leq, +, \cdot)$ *un corps réel clos (par exemple:* $\mathbf{R}$*).*
Si $\varphi(x)$ *est une propriété de premier ordre d'un seul inconnu* x*, alors*

$$\{t \in \mathcal{R} : \varphi(t) \textit{ est vraie}\}$$

est une réunion finie de points et d'intervalles.

Démonstration.

Si la propriété est $P(x) \geq 0$, avec un polynôme P, c'est facile.
Par élimination de quantificateurs, toute autre propriété est une combinaison booléenne de propriétés de la forme $P_i(x) \geq 0$. $\square$

Structures et théories o-minimales

Corollaire

Soit $(\mathcal{R}, \leq, +, \cdot)$ *un corps réel clos (par exemple:* $\mathbf{R}$*).*
Si $\varphi(x)$ *est une propriété de premier ordre d'un seul inconnu* x*, alors*

$$\{t \in \mathcal{R} : \varphi(t) \textit{ est vraie}\}$$

est une réunion finie de points et d'intervalles.

Démonstration.

Si la propriété est $P(x) \geq 0$, avec un polynôme P, c'est facile.
Par élimination de quantificateurs, toute autre propriété est une combinaison booléenne de propriétés de la forme $P_i(x) \geq 0$. $\square$

Une structure $(\mathcal{R}, \leq, \ldots)$ ayant cette propriété est dite <u>o-minimale</u>.

Structures et théories o-minimales (bis)

De nombreuses propriétés analytiques / géométrique du corps réel sont vraies dans toute structure o-minimale.

Théorème (Pillay, Steinhorn, . . .)

Si $(\mathcal{R}, \leq, \dots)$ est o-minimale alors toute fonction $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ que l'on peut définir dans $\mathcal{R}$ est continue, et même dérivable, par morceaux.

(Lorsqu'il s'agit de $(\mathbf{R}, \leq, +, \cdot)$, c'est un théorème classique.)

Théorème (Wilkie, van den Dries, Macintyre, Marker)

La structure $(\mathbf{R}, \leq, +, \cdot, \exp, \sin_{\restriction [0,1]})$ est o-minimale.

Exercice: $(\mathbf{R}, \leq, +, \cdot, \sin)$ n'est pas o-minimale, ni décidable.

La théorie des modèles moderne: de la modestie prétentieuse

En nous concentrant sur des systèmes d'axiomes pour des objets mathématiques spécifiques (et non pour toutes les mathématiques), nous pouvons:

La théorie des modèles moderne: de la modestie prétentieuse

En nous concentrant sur des systèmes d'axiomes pour des objets mathématiques spécifiques (et non pour toutes les mathématiques), nous pouvons:

1. Mieux comprendre ce qui est exprimable en logique de premier ordre dans une structure (élimination des quantificateurs):
   - Corps réels clos.
   - Corps algébriquement clos.
   - Corps différentiellement clos.
   - Corps valués algébriquement clos.
   - ...

La théorie des modèles moderne: de la modestie prétentieuse

En nous concentrant sur des systèmes d'axiomes pour des objets mathématiques spécifiques (et non pour toutes les mathématiques), nous pouvons:

1. Mieux comprendre ce qui est exprimable en logique de premier ordre dans une structure (élimination des quantificateurs):
   - Corps réels clos.
   - Corps algébriquement clos.
   - Corps différentiellement clos.
   - Corps valués algébriquement clos.
   - ...
2. Généraliser des techniques mathématiques d'une structure à d'autres:
   - La géométrie algébrique réelle $\Longrightarrow$ structures o-minimales.
   - La géométrie algébrique complexe $\Longrightarrow$ structures stables.
   - ...

La théorie des modèles moderne: de la modestie prétentieuse

En nous concentrant sur des systèmes d'axiomes pour des objets mathématiques spécifiques (et non pour toutes les mathématiques), nous pouvons:

1. Mieux comprendre ce qui est exprimable en logique de premier ordre dans une structure (élimination des quantificateurs):
    - Corps réels clos.
    - Corps algébriquement clos.
    - Corps différentiellement clos.
    - Corps valués algébriquement clos.
    - ...
2. Généraliser des techniques mathématiques d'une structure à d'autres:
    - La géométrie algébrique réelle $\Longrightarrow$ structures o-minimales.
    - La géométrie algébrique complexe $\Longrightarrow$ structures stables.
    - ...
3. Pareil, mais pour des structures métriques, dans une logique à valeurs de vérité réelles (au lieu de $\{\mathrm{Vrai}, \mathrm{Faux}\}$).

La théorie des modèles moderne: de la modestie prétentieuse

En nous concentrant sur des systèmes d'axiomes pour des objets mathématiques spécifiques (et non pour toutes les mathématiques), nous pouvons:

1. Mieux comprendre ce qui est exprimable en logique de premier ordre dans une structure (élimination des quantificateurs):
   - Corps réels clos.
   - Corps algébriquement clos.
   - Corps différentiellement clos.
   - Corps valués algébriquement clos.
   - ...
2. Généraliser des techniques mathématiques d'une structure à d'autres:
   - La géométrie algébrique réelle $\Longrightarrow$ structures o-minimales.
   - La géométrie algébrique complexe $\Longrightarrow$ structures stables.
   - ...
3. Pareil, mais pour des structures métriques, dans une logique à valeurs de vérité réelles (au lieu de $\{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$).
4. ...

Merci.