Contre-exemples au théorème de Brouwer en dimension infinie

Les espaces ℓ^p sont une source classique de contre-exemples.

Considérons l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ l'espace des suites complexes de carré sommable, muni de la norme naturelle

$$\|u\| \;=\; \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2\right)^{1/2}, \quad \text{pour tout } u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})\,.$$

Soit alors l'application

$$\begin{array}{lccl} f: & \ell^2(\mathbb{N}) & \to & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & f(u) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\,;\; v_n = u_{n-1} \text{ si } n \neq 0 \text{ et } v_0 = \sqrt{1 - \|u\|^2}\,. \end{array}$$

Elle continue et à valeurs dans la sphère unité. Elle envoie en particulier la boule unité dans la boule unité. Pourtant elle n'admet pas de point fixe : si on avait $f(u) = u$ on aurait $\|u\| = 1$ et donc $u_0 = 0$ puis successivement $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui évidemment incompatible avec $\|u\| = 1$.

Un autre exemple du même genre en un peu plus compliqué est le suivant, valable dans tous les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$ avec $p < +\infty$, munis de la norme

$$\|u\| \;=\; \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p\right)^{1/p}, \quad \text{pour tout } u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{Z})\,.$$

Soit l'application

$$\begin{array}{lccl} f: & \ell^p(\mathbb{Z}) & \to & \ell^p(\mathbb{Z}) \\ & u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & f(u) = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}}\,;\; v_n = u_{n-1} \text{ si } n \neq 0 \text{ et } v_0 = u_{-1} + 1 - \|u\|\,. \end{array}$$

C'est une application continue envoyant la boule unité dans elle-même. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ était un point fixe on aurait $u_n = u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = u_{-1}$ pour tout $n \in -\mathbb{N}^*$. Pour qu'un tel u soit dans $\ell^p(\mathbb{Z})$ avec $p < +\infty$ il faut nécessairement que $u_0 = u_{-1} = 0$. Mais dans ce cas (pour que $f(u)_0 = u_0$) on doit avoir $1 - \|u\| = 0$, ce qui n'est pas possible.