TOPOLOGIE FAIBLE

SYLVIE BENZONI

Rappelons qu'une *topologie* sur un ensemble X est une famille de parties de X, appelées *ouverts*, vérifiant les trois propriétés suivantes :

(1) l'ensemble vide $\emptyset$ et l'ensemble X lui-même font partie des ouverts,

(2) toute réunion d'ouverts est un ouvert,

(3) toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Une topologie est d'autant plus *fine* qu'elle contient plus d'ouverts. Des exemples extrêmes sont

– la *topologie grossière* (la moins fine !), pour laquelle seuls $\emptyset$ et X sont des ouverts,
– la *topologie discrète* (la plus fine), pour laquelle toutes les parties de X sont des ouverts.

Un exemple moins trivial de topologie est celle engendrée par les boules ouvertes dans un espace métrique : les ouverts sont alors tous les ensembles obtenus comme réunions quelconques d'intersections finies de boules ouvertes. En particulier dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et engendrent la même topologie.

On dit qu'une topologie est *séparée* si pour tout couple de points distincts x_1 et x_2, il existe des ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $x_1 \in O_1$ et $x_2 \in O_2$. Une topologie d'espace métrique est toujours séparée (il suffit de prendre pour les ouverts O_1 et O_2 des boules ouvertes de rayon strictement inférieur à la moitié de la distance entre x_1 et x_2).

Définition 1 (Borel–Lebesgue)**.** *Dans un espace topologique séparé, une partie est* compacte *si de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Avec des symboles, $K \subset X$ est compacte si, pour toute famille d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$ telle que $K \subset \cup_{i \in I} O_i$ il existe une partie finie J de I telle que $K \subset \cup_{j \in J} O_j$.*

Moralité (un anglophone parlerait de « rule of thumb ») : moins il y a d'ouverts, ou encore, moins la topologie est fine, plus il y a de compacts.

Dans les espaces métriques, les compacts sont caractérisés par deux propriétés :

(1) la *pré-compacité* : un ensemble A est dit pré-compact (ou encore *totalement borné*) si pour tout $\varepsilon > 0$, A admet un recouvrement fini par des boules de rayon ε,

(2) la *complétude* : toutes les *suites de Cauchy* sont convergentes.

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie (qui est toujours fermé), un ensemble est complet si et seulement s'il est fermé, et un ensemble est totalement borné si et seulement s'il est borné (il suffit de le vérifier pour la norme $\| \cdot \|_\infty$, dont les boules sont des pavés). Par suite, les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les ensembles fermés bornés. En revanche, dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, la boule fermée unité n'est jamais compacte : c'est le théorème de Riesz (voir par exemple [1, p. 92]).

Date: 3 mars 2010.

1. Topologie faible

Désormais, X est un $\mathbb{R}$-*espace de Banach*, c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet sur $\mathbb{R}$. Il est muni de la topologie engendrée par les boules ouvertes, que l'on appellera *topologie forte*. On va définir la topologie faible comme ayant moins d'ouverts et on verra qu'elle a plus de compacts que la topologie forte. On note X' le *dual topologique* de X, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur X : c'est un espace de Banach pour la norme $|||\cdot|||$ définie par

$$|||f||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\langle f, x\rangle}{\|x\|}\,,$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le crochet de dualité (c'est-à-dire que $\langle f, x\rangle$ désigne l'image de x par la forme linéaire f).

Définition 2. *La* topologie faible *sur X est la topologie la moins fine telle que toutes applications $f : X \to \mathbb{R}$ avec $f \in X'$ soient continues.*

Ceci est une « vraie » définition au sens où il est possible de construire la topologie faible. En effet, celle-ci doit au minimum contenir tous les ensembles de la forme $f^{-1}(U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in X'$. Si l'on considère toutes les réunions quelconques d'intersections finies de tels ensembles, on obtient une topologie, et c'est bien sûr celle qui a le moins d'ouverts parmi les topologies ayant les ensembles $f^{-1}(U)$ comme ouverts.

La topologie faible est moins fine que la topologie forte, c'est-à-dire que tous les ouverts faibles sont fortement ouverts, car c'est le cas des ouverts faibles de la forme $f^{-1}(U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in X'$.

En dimension finie, la topologie faible coïncide avec la topologie forte. En effet, notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de X et $(f_1, \dots, f_n)$ sa base duale. Si U est un ouvert fort, si $x_0 \in U$ il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r soit incluse dans U. Or d'après l'inégalité triangulaire, cette boule contient l'ouvert faible

$$V(x_0) := \{x \in X\,;\ |\langle f_i, x - x_0\rangle| < r/n\,,\ \forall i \in \{1, \dots, n\}\}\,.$$

Ainsi U est la réunion des ouverts faibles $V(x_0)$ lorsque x_0 parcourt U, c'est donc un ouvert faible.

En dimension infinie en revanche, la topologie faible est strictement moins fine que la topologie forte : une boule ouverte n'est pas faiblement ouverte, voir [1, p. 37].

La topologie faible est séparée. Ceci est une conséquence du théorème de Hahn-Banach (forme géométrique, voir [1, p. 7]): si $x_1 \neq x_2$ il existe $f \in X'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle f, x_1\rangle < \alpha < \langle f, x_2\rangle\,.$$

Par suite, les ouverts faibles $O_1 := \{x \in X\,;\ \langle f, x\rangle < \alpha\}$ et $O_2 := \{x \in X\,;\ \langle f, x\rangle > \alpha\}$ séparent les points x_1 et x_2.

Rappelons qu'on appelle *voisinage* d'un point x tout ensemble contenant un ouvert contenant x, et qu'une *base de voisinages* est une famille de voisinages telle que tout ouvert contenant x contient au moins un de ces voisinages. Quel que soit $x_0 \in X$, une base de voisinages faibles de x_0 est formée par les ouverts faibles de la forme

$$\{x \in X\,;\ |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon\,,\ \forall i \in I\}\,,$$

où $\varepsilon > 0$, I est fini et $f_i \in X'$.

On distingue la convergence d'une suite pour la topologie faible en la notant $\rightharpoonup$ (au lieu de $\to$ pour la convergence forte). Grâce aux bases de voisinages décrites ci-dessus, on voit que la *convergence faible* est caractérisée par :

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in X'\,,\ \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle\,.$$

• La convergence forte implique la convergence faible, car

$$|\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \le |||f|||\ \|x_n - x\|\,.$$

• Toute suite faiblement convergente est bornée. En effet, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est faiblement convergente, alors pour tout $f \in X'$ la suite numérique $(\langle f, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée. Grâce au théorème de Banach-Steinhaus (ou « principle of uniform boundedness » [1, p. 16]) appliqué à $T_n : X' \to \mathbb{R}$ défini par $T_n(f) = \langle f, x_n\rangle$ et au corollaire du théorème de Hahn-Banach selon lequel $\|x_n\| = |||T_n|||$, on en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
• On a par ailleurs un résultat de « convergence fort-faible » : si $x_n \rightharpoonup f$ et $f_n \to f$ alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$. En effet,

$$|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \le |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \le |||f_n - f|||\ \ \|x_n\| + |\langle f, x_n - x\rangle|$$

où chacun des termes tend vers zéro par hypothèse.

Les *fermés* sont par définition les complémentaires des ouverts. Par suite, les fermés faibles sont des fermés forts. Mais la réciproque est fausse. Par exemple, la sphère unité n'est pas faiblement fermée en dimension infinie, son adhérence fermée étant la boule fermée (voir [1, p. 37]). En revanche, les *convexes* fortement fermés sont faiblement fermés.

Démonstration. Si $C \subset X$ est convexe fermé, soient $U = X\backslash C$ et $x_0 \in U$. D'après le théorème de Hahn-Banach il existe $f \in X'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle f, x_0\rangle < \alpha < \langle f, y\rangle$$

pour tout $y \in C$. Alors $\{x \in X\,;\ \langle f, x\rangle < \alpha\}$ est un ouvert faible inclus dans U et contenant x_0. Ceci montre que U est faiblement ouvert, et donc que C est faiblement fermé. □

La topologie faible est intéressante lorsqu'on connaît bien X'. C'est le cas par exemple pour $L^p(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue et $p \in [1, +\infty[$, dont le dual topologique s'identifie avec $L^{p'}$ avec $1/p + 1/p' = 1$ (voir le tableau 1) via le théorème de représentation de Riesz [1, p. 61] : pour tout $f \in (L^p(\Omega))'$ il existe un unique $v \in L^{p'}(\Omega)$ tel que, quel que soit $u \in L^p(\Omega)$,

$$\langle f, u\rangle = \int_\Omega vu\,.$$

Le théorème qui suit montre qu'elle est définitivement plus intéressante si X est *réflexif*, c'est-à-dire isomorphe à son bi-dual X'' (par l'injection canonique $x \mapsto Jx : f \mapsto \langle f, x\rangle$).

Théorème 1 (Kakutani)**.** *La boule fermée unité est faiblement compacte si et seulement l'espace est réflexif.*

Plus généralement, dans un espace réflexif, les convexes fermés bornés sont faiblement compacts, voir [1, pp. 44-46]. Ce théorème se démontre en passant par une topologie encore moins fine que la topologie faible dans X'.

2. Topologie faible *

Étant donné un espace de Banach X et son dual topologique X', on peut bien entendu définir la topologie faible sur X'. On va en fait définir une topologie encore moins fine (strictement si X n'est pas réflexif).

Définition 3. *La topologie faible $*$ sur X' est la topologie la moins fine telle que toutes applications*

$$\begin{array}{rccc} Jx: & X' & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \langle f, x\rangle \end{array}$$

avec $x \in X$ soient continues.

La topologie faible $*$ est séparée. Ceci résulte quasiment directement des définitions. En effet, si f_1 et f_2 sont deux éléments distincts de X', il existe $x \in X$ tel que $\langle f_1, x\rangle < \langle f_2, x\rangle$. En choisissant un nombre réel $\alpha \in]\langle f_1, x\rangle, \langle f_2, x\rangle[$, on peut prendre $O_1 := \{f \in X' ; \langle f, x\rangle < \alpha\}$ et $O_2 := \{f \in X' ; \langle f, x\rangle > \alpha\}$ comme ouverts faibles $*$ séparant f_1 et f_2.

Quel que soit $f_0 \in X'$, une base de voisinages faibles $*$ de f_0 est formée par les ouverts faibles $*$ de la forme

$$\{f \in X' ; |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon \,,\ \forall i \in I\} \,,$$

où $\varepsilon > 0$, I est fini et $x_i \in X$.

La *convergence faible* $*$ est caractérisée par :

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X \,,\ \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \,.$$

La convergence forte implique la convergence faible qui elle-même implique la convergence faible $*$.

Toute suite faible $*$ convergente est bornée. En effet, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est faible $*$ convergente, alors pour tout $x \in X$ la suite numérique $(\langle f_n, x\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée. Grâce au théorème de Banach-Steinhaus [1, p. 16] appliqué à $f_n : X \to \mathbb{R}$ d, on en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Par ailleurs si $x_n \to x$ et $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$. En effet,

$$|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \leq |\langle f_n - f, x\rangle| + |\langle f_n, x_n - x\rangle| \ \leq |\langle f_n - f, x\rangle| + |||f_n||| \ \|x_n - x\|$$

où chacun des termes tend vers zéro par hypothèse.

Les *fermés faibles* $*$ sont par définition les complémentaires des ouverts faibles $*$. Les fermés forts, et même les convexes fermés, ne sont pas fermés faibles $*$ en général: si X n'est pas réflexif et si $\xi \in X''\backslash J(X)$, alors l'hyperplan (fortement et) faiblement fermé $\xi^\perp$ n'est pas faible $*$ fermé (voir [1, p. 42]). Cependant les boules fermées sont faible $*$ fermées et même compactes (voir [1, p. 42–43]) :

Théorème 2 (Banach–Alaoglu)**.** *La boule fermée unité est faible $*$ compacte.*

Ce théorème intervient notamment dans la démonstration du théorème de Kakutani. Ils permettent à eux deux d'extraire des sous-suites convergentes, moyennnant quelques précautions liées aux notions de métrisabilité et de séparabilité.

3. Métrisabilité et séparabilité

La notion de compacité définie par la propriété de Borel–Lebesgue (définition 1) est équivalente à la propriété de Bolzano–Weierstrass (selon laquelle toute suite bornée admet une sous-suite convergente) seulement dans les espaces métriques. Or l'espace X' muni de la topologie faible $*$ n'est pas métrisable si X est de dimension infinie. Cependant, la boule fermée unité de X' est métrisable si X est *séparable* (c'est-à-dire admet une famille dénombrable dense): il « suffit » (voir [1, p. 48–49]) de définir la distance d par

$$d(f, g) \ = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \, |\langle f - g, x_n\rangle| \,,$$

où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille dénombrable dense dans la boule fermée unité de X.

Par suite, le théorème de Banach–Alaoglu est surtout utile lorsque X est séparable (voir [1, p. 50]) :

Corollaire 1. *Si X est séparable, toute suite bornée dans X' admet une sous-suite faible $*$ convergente.*

Ceci s'applique par exemple à $X = L^1$: toute suite bornée dans L^∞ admet une sous-suite faible $*$ convergente.

En matière de topologie faible, le théorème de Bolzano-Weiestrass est vrai sous l'hypothèse que X soit réflexif (comme dans le théorème de Kakutani) :

Corollaire 2. *Si X est réflexif, toute suite bornée dans X' admet une sous-suite faiblement convergente.*

Attention, ceci ne s'applique pas à $X = L^1$. La caractérisation des compacts faibles dans L^1 est fournie (voir par exemple à [2, p. 274]) par le

Théorème 3 (Dunford-Pettis)**.** *Soient Ω un espace mesuré séparable et localement compact et $\mathscr{F}$ un sous-ensemble borné de $L^1(\Omega)$. Alors $\mathscr{F}$ est faiblement compact si et seulement si*

(1) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout A de mesure $|A| < \delta$, pour tout $f \in \mathscr{F}$ on ait $\int_A |f| \le \varepsilon$,*

(2) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que pour tout $f \in \mathscr{F}$ on ait $\int_{\Omega\setminus K} |f| \le \varepsilon$.*

En particulier, si Ω est de mesure finie (par exemple si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue), le point (2) est automatiquement satisfait.

Un autre cas particulier est celui d'une *mesure discrète*, c'est-à-dire celui d'un espace ℓ^1, dans lequel le point (1) est automatiquement satisfait et où l'on voit que la compacité faible est équivalente à la compacité forte.

TAB. 1. Espaces $L^p(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue

espace	réflexif	séparable	son dual	dual de
L^1	non	oui	L^∞	?
L^p, $1 < p < \infty$	oui	oui	$L^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$	$L^{p'}$
L^∞	non	non	$\supsetneq L^1$	L^1

Références

[1] Brezis, H. Analyse fonctionnelle : Théorie et applications. Masson 1983.

[2] Edwards, R. E. Functional analysis : theory and applications. Holt-Rinehart and Winston, 1965.