Agrégation de Mathématiques
Préparation à l'écrit d'Analyse
Année 2012-2013

Feuille d'exercices 1

Corrigé de l'exercice 1. (*L'Hospital et Cesàro–Stoltz*)

a) D'après le théorème des accroissements finis généralisé, pour tous x, $y \in \mathbb{R}^+$, $x < y$, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

(Noter que les dénominateurs sont non nuls d'après l'hypothèse (i) : $g'(c) > 0$ et $g(x) - g(y) > 0$ puisque g est strictement croissante.) Comme $c \to \infty$ avec x et y, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x \neq y \\ x,y \to \infty}} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \ell\,.$$

Supposons d'abord que ℓ est fini. Quels que soient x et y on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \ell = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \ell + \frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}\,\frac{g(y)}{g(x)}\,.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $R \in \mathbb{R}^+$ tel que pour $x > y \geq R$,

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

De plus, d'après l'hypothèse (ii), il existe $R' > R$ tel que pour $x \geq R'$,

$$\left|\frac{f(R)}{g(x)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,, \quad \left|\frac{f(x) - f(R)}{g(x) - g(R)}\,\frac{g(R)}{g(x)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

(On utilise pour la seconde inégalité le fait que taux d'accroissement entre R et x est borné : on connaît même une borne, à savoir $\ell + \varepsilon/3$.) Par suite,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| \leq \varepsilon$$

pour tout $x \geq R'$.

Supposons maintenant que $\ell = +\infty$ (si $\ell = -\infty$ il suffit de changer f en $-f$). Quels que soient x et y on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} + \frac{f(y)}{g(x)}\,.$$

Étant donné $A > 0$, il existe $R \in \mathbb{R}^+$ tel que pour $x > y \geq R$,

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \geq 4A\,,$$

et il existe $R' \geq R$ tel que pour $x \geq R'$,

$$\left|\frac{f(R)}{g(x)}\right| \leq A\,, \quad \left|\frac{g(R)}{g(x)}\right| \leq \frac{1}{2}\,,$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq A$$

pour tout $x \geq R'$.

b) C'est la version « discrète » du résultat précédent. On commence par démontrer que

$$\lim_{\substack{n\neq m\\ n,m\to\infty}} \frac{a_n - a_m}{b_n - b_m} = \ell\,.$$

Ceci repose sur le calcul suivant (où l'on suppose $\ell \in \mathbb{R}$ pour fixer les idées). Quels que soient les entiers n et m avec $n > m$ on a

$$\frac{a_n - a_m}{b_n - b_m} - \ell = \sum_{k=0}^{n-m-1} \left(\frac{a_{m+k+1} - a_{m+k}}{b_{m+k+1} - b_{m+k}} - \ell \right) \frac{b_{m+k+1} - b_{m+k}}{b_n - b_m}\,.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$,

$$\left| \frac{a_{p+1} - a_p}{b_{p+1} - b_p} - \ell \right| \leq \varepsilon\,.$$

On déduit donc de cette majoration, de l'égalité précédente et de l'inégalité triangulaire que pour $n > m \geq N$,

$$\left| \frac{a_n - a_m}{b_n - b_m} - \ell \right| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{|b_{m+k+1} - b_{m+k}|}{|b_n - b_m|}\,.$$

C'est ici qu'intervient l'hypothèse (j) : puisque la suite (b_n) est strictement croissante, la somme ci-dessus vaut simplement 1. On a donc bien la limite annoncée. On peut ensuite conclure exactement comme dans le cas continu, en utilisant l'hypothèse (jj).

c) Un cas particulier remarquable est celui de $b_n = n$, qui redonne la convergence en moyenne de Cesàro d'une suite convergente (u_n) en posant $a_n = \sum_{k=0}^n u_n$.

Corrigé de l'exercice 2. (*Convergence simple, uniforme et normale*)

a) Le cas $x = 0$ est trivial, puisque $u_n(0) = 0$ quel que soit n. Pour $x > 0$ et $n \geq 2$ on a

$$0 < u_n(x) \leq x\,\mathrm{e}^{-nx}/\ln 2\,.$$

Comme $e^{-x} < 1$, la *série géométrique* $\sum e^{nx}$ converge, et par conséquent la série $\sum_{n\geq 2} u_n(x)$ converge. (On aurait aussi pu invoquer la « règle de d'Alembert », car $u_{n+1}(x)/u_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \ln(n+1)/\ln(n)$ tend vers $\mathrm{e}^{-x} < 1$ lorsque $n \to \infty$.)

b) Pour étudier la convergence normale de $\sum_n u_n(x)$ il faut d'abord chercher $\|u_n\|_\infty = \max_{x\in I} u_n(x)$. Comme $u_n'(x) = (1/x - n)\,u_n(x)$, ce maximum est atteint pour $x = 1/n$. Or $u_n(1/n) = e^{-1}/(n \ln n)$ et la série (de Bertrand) de terme général $1/(n \ln n)$ diverge. Donc la série $\sum_n u_n(x)$ n'est pas normalement convergente.

c) La convergence uniforme de la série $\sum_n u_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$ est une conséquence du critère de Cauchy uniforme :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^+\,,\ \forall n \geq m \geq N\,;\ \left| \sum_{k=m}^{n} u_k(x) \right| \leq \varepsilon\,,$$

ce qui se vérifie facilement par comparaison avec une intégrale :

$$\forall n \geq m \geq N \geq 3\,,\ \left| \sum_{k=m}^{n} u_k(x) \right| \leq \int_{N-1}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-tx}}{\ln t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{\mathrm{e}^{-(N-1)x}}{\ln(N-1)} \leq \frac{1}{\ln(N-1)}\,.$$

(Noter que la fonction $t \geq 2 \mapsto \frac{x\,\mathrm{e}^{-tx}}{\ln t}$ est bien décroissante pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.)

Remarque. La série $\sum_n u_n(x)$ est normalement convergente (et donc uniformément convergente) sur $[R,+\infty[$ quel que soit $R>0$, car $0<u_n(x)<u_n(R)$ pour $1/n<R<x$. Par ailleurs, les sommes partielles de $\sum_n u_n(x)$ forment une suite croissante (puisque $u_n(x)\geq 0$) de fonctions continues sur l'intervalle compact $[0,R]$. On peut invoquer le lemme de Dini (appliqué aux sommes partielles) pour montrer que la série $\sum_n u_n$ converge uniformément sur $[0,R]$ à condition de vérifier préalablement que la somme $f(x):=\sum_{n\geq 2} u_n(x)$ définit une fonction continue sur $[0,R]$. La continuité sur $]0,R]$ ne pose pas de problème : c'est une conséquence de la continuité des u_n et de la convergence normale de la série sur $[r,+\infty[$, $r>0$. Il reste la continuité en 0, un peu délicate. On peut la démontrer en reprenant la comparaison série/intégrale faite ci-dessus. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, $N\geq 2$, on a

$$\left|\sum_{n=2}^{N} u_k(x)\right| \;\leq\; \sum_{n=2}^{N} u_k(x) \;+\; \int_N^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-tx}}{\ln t}\,\mathrm{d}t \;\leq\; \sum_{n=2}^{N} u_k(x) \;+\; \frac{1}{\ln N}\,.$$

Étant donné $\varepsilon>0$, on commence par choisir $N\geq 2/\varepsilon$. Comme u_k tend vers zéro en zéro, il existe alors $\eta>0$ tel que pour tout $x\in[0,\eta]$, pour tout $k\in\{2,\ldots,N\}$, $0\leq u_k(x)\leq \varepsilon/2N$. On en déduit

$$\left|\sum_{n=2}^{N} u_k(x)\right| \;\leq\; \varepsilon\,.$$

Corrigé de l'exercice 3. (*Abel*)

a) Par définition on a $a_k=A_k-A_{k-1}$ pour tout $k\geq 0$, en posant par convention $A_{-1}=0$. Par suite,

$$\sum_{k=N}^{n} a_k b_k \;=\; \sum_{k=N}^{n} (A_k-A_{k-1})\,b_k \;=\; \sum_{k=N}^{n-1} A_k\,(b_k \;-\; b_{k+1}) \;+\; A_n\,b_n \;-\; A_{N-1}\,b_N\,.$$

b) D'après cette égalité et l'inégalité triangulaire on a, en posant $\|A\|_\infty=\max|A_n|$ (qui est fini d'après l'hypothèse (iii)),

$$\left|\sum_{k=N}^{n} a_k b_k\right| \;\leq\; \|A\|_\infty \sum_{k=N}^{n-1} |b_k \;-\; b_{k+1}| \;+\; \|A\|_\infty\,|b_n| \;+\; \|A\|_\infty\,|b_N|\,.$$

On déduit alors des hypothèses (i) et (ii) (et du « théorème des gendarmes », mais cette expression peut sembler maladroite à l'agrégation) que

$$\lim_{n>N\to\infty} \sum_{k=N}^{n} a_k b_k \;=\; 0\,,$$

c'est-à-dire que les sommes partielles de la série de terme général $a_n b_n$ vérifient le critère de Cauchy. Donc cette série converge.

c) Un cas particulier souvent considéré est $a_n=(-1)^n$, de sorte que $A_n=(-1)^n$ aussi, ce qui est évidemment borné et permet de montrer que des *séries alternées* sont convergentes. C'est le cas par exemple pour la série alternée de terme général $(-1)^n/n$, puisque $1/n$ tend vers 0 et la série de terme général $|1/(n+1)-1/n|=1/(n(n+1))$ converge.

d) La démonstration est rigoureusement identique lorsque l'une des deux suites est dans un espace de Banach (remplacer alors les valeurs absolues par des normes) et l'autre est une suite numérique, ou lorsque les deux suites sont dans une algèbre de Banach.

e) Pour tout $R\geq a$ on a par intégration par parties

$$\int_a^R f(t)g(t)\mathrm{d}t \;=\; -\int_a^R F(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t \;+\; [F\,g]_a^R\,.$$

Or d'après les hypothèses (ii) et (iii), l'intégrale $\int_a^R F\,g'$ est absolument convergente, et d'après (i) et (iii), le terme de bord $F(R)g(R)$ tend vers 0. Donc

$$\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(t)g(t)\mathrm{d}t \;=\; -\int_a^\infty F(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t \;-\; F(a)\,g(a)\,.$$

f) On utilise souvent cette astuce lorsque f est une fonction trigonométrique (et donc F aussi) et g est une fonction rationnelle.

Corrigé de l'exercice 4. (*Série vs intégrale*)

a) En intégrant par parties chaque morceau de la somme

$$\int_a^N f(t)\mathrm{d}t \;=\; \sum_{n=a}^{N-1}\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

on obtient

$$\int_a^N f(t)\mathrm{d}t \;=\; -\sum_{n=a}^{N-1}\int_n^{n+1}(t\,-\,n)\,f'(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \sum_{n=a}^{N-1} f(n+1)\,,$$

ce qui donne exactement la formule demandée.

b) Si $\displaystyle\int_a^\infty |f'(t)|\mathrm{d}t < \infty$, puisque $|\{t\}| < 1$, $\displaystyle\int_a^\infty \{t\}f'(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente. On déduit donc de la formule du a) que $\displaystyle\sum_a^N f(n)$ a une limite finie si et seulement si $\displaystyle\int_a^N f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque $N\to\infty$. Il reste à prouver que si $\sum f(n)$ converge alors la fonction $x\mapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie en $+\infty$. Comme

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \;=\; \int_a^{E(x)} f(t)\mathrm{d}t + \int_{E(x)}^x f(t)\mathrm{d}t,$$

où le premier terme a une limite finie d'après ce qui précède (et le fait que $E(x)$ tend vers $+\infty$ avec x), il suffit de montrer que le second tend vers zéro. Par intégration par parties on a

$$\int_{E(x)}^x f(t)\mathrm{d}t \;=\; \int_{E(x)}^x (t-x)\,f'(t)\mathrm{d}t \;+\; \{x\}\,f(E(x))\,.$$

Or $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ si $\displaystyle\sum_n f(n)$ converge, donc (puisque $|\{x\}|$ est majoré par 1)

$$\lim_{x\to\infty}\{x\}\,f(E(x)) \;=\; 0\,.$$

Et par ailleurs

$$\left|\int_{E(x)}^x (t-x)\,f'(t)\mathrm{d}t\right| \;\le\; \int_{E(x)}^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

tend aussi vers 0 puisque $\int_a^\infty |f'(t)|\mathrm{d}t < \infty$.

c) Ce critère s'applique à toute fonction monotone tendant vers 0 à l'infini (ce qui suffit pour que $\int f'$ soit absolument convergente). On peut en particulier l'utiliser pour $f(t) = 1/t$ (série harmonique) et plus généralement $f(t) = t^{-\alpha}\,(\ln t)^\beta$ (séries de Bertrand) avec $\alpha\ge 1$, $\beta\ge 0$.

Corrigé de l'exercice 5. (*Commutativement=absolument, en dimension finie*)

a) Soit $\sigma\in S_{\mathbb{N}}$. Pour $N\in\mathbb{N}$, notons $N_\sigma := \max\{\sigma(0),\ldots,\sigma(N)\}$. On a

$$\sum_{n=0}^N \|a_{\sigma(n)}\| \;\le\; \sum_{n=0}^{N_\sigma}\|a_n\| \le \sum_{n=0}^{+\infty}\|a_n\| \;<\; +\infty$$

par hypothèse. Donc $\sum a_{\sigma(n)}$ est absolument convergente (on dit encore que la famille $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est *sommable*). Notons

$$S_N^\sigma := \sum_{n=0}^{N} a_{\sigma(n)}\,, \quad S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n\,.$$

On va montrer que $S_N^\sigma - S_N$ tend vers zéro lorsque $N \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $q \geq p \geq P$,

$$\sum_{k=p}^{q} \|a_k\| \leq \varepsilon\,.$$

Notons $\tau = \sigma^{-1}$ et (comme précédemment) $P_\tau := \max\{\sigma^{-1}(0), \ldots, \sigma^{-1}(P)\}$. Par définition, si $k > P_\tau$ alors $\sigma(k) > P$, d'où

$$\sum_{k=p}^{q} \|a_{\sigma(k)}\| \leq \varepsilon$$

pour $q \geq p > P_\tau$. Par ailleurs, pour tout $n \in \{0, \ldots, P\}$ on a $\sigma^{-1}(n) \leq P_\tau$. Donc la différence $S_{P_\tau}^\sigma - S_P$ se réduit à

$$S_{P_\tau}^\sigma - S_P = \sum_{n\leq P_\tau,\, \sigma(n)>P} \|a_{\sigma(n)}\| \leq \varepsilon$$

par définition de P. Par suite, pour $N > P$,

$$\|S_N^\sigma - S_N\| \leq \|S_{P_\tau}^\sigma - S_P\| + \sum_{k=P_\tau+1}^{N} \|a_{\sigma(k)}\| + \sum_{k=P+1}^{N} \|a_k\| \leq 3\varepsilon\,.$$

b) Si $\sum a_n$ est semi-convergente, $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = +\infty$. Donc

$$\sum_{n=0}^{N} (a_n)^\pm = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{N} |a_n| \pm \sum_{n=0}^{N} a_n\right) \to +\infty$$

lorsque $N \to +\infty$ (comme somme d'une suite convergente et d'une suite tendant vers $+\infty$.

Avant de traiter le cas général, voyons un exemple de permutation des termes d'une série semi-convergente conduisant par « sommation par paquets » à une série divergente. Considérons la série alternée de terme général $(-1)^{n+1}/n$ pour $n \geq 2$. On remarque que chaque entier impair $n \geq 3$ peut s'écrire de façon unique $n = 2^p + 2k + 1$ avec $k \in \{0, \ldots, 2^{p-1} - 1\}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Par suite, on peut sommer les termes de la série alternée par paquets de la forme

$$s_p := \sum_{k=0}^{2^{p-1}-1} \frac{1}{2^p + 2k + 1} - \frac{1}{2p}\,, \quad p \in \mathbb{N}^*\,.$$

On a

$$s_p \geq \frac{2^{p-1}}{2^{p+1} - 1} - \frac{1}{2p} \to \frac{1}{4}$$

lorsque $p \to +\infty$, donc la série de terme général s_p diverge. Le p-ième « paquet » est constitué des entiers de la forme $2^p + 2k + 1$ avec $k \in \{0, \ldots, 2^{p-1} - 1\}$ et de $2p$: il comporte $2^{p-1} + 1$ termes. Ce décompte permet de définir la permutation $\sigma : \mathbb{N}\backslash\{0, 1\} \to \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. En effet, en listant les éléments des paquets successifs on voit que pour $p \in \mathbb{N}^*$, l'entier $2p$ se trouve en position $\sum_{j=1}^{p}(2^{j-1} + 1) = p + 2^p - 1$, de sorte que

$$\sigma(p + 2^p - 1) = 2p \quad \text{ et } \sigma(p + 2^p - 1 - k) = 2^p + 2(2^{p-1} - 1 - k) + 1\,,\ k \in \{0, \ldots, 2^{p-1} - 1\}\,,$$

ce que l'on peut encore écrire (en posant $\widetilde{k} = 2^{p-1} - 1 - k$ et en omettant les tildas)

$$\sigma(p - 1 + 2^{p-1} + k) = 2^p + 2k + 1\,,\ k \in \{0, \ldots, 2^{p-1} - 1\}\,.$$

La permutation réciproque s'écrit explicitement comme

$$\sigma^{-1}: \begin{array}{ccl} \mathbb{N}\backslash\{0,1\} & \to & \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \\ n & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} n/2+2^{n/2}-1\,,\ n\in 2\mathbb{N}^*\,, \\ p-1+2^{p-1}+k\,,\ p:=E(\ln(n-1)/\ln 2), k:=(n-1-2^p)/2\,,\ n\notin 2\mathbb{N}^*. \end{array}\right. \end{array}$$

On revient maintenant au cas général. Puisque $\sum_{n=0}^{N}(a_n)^-$ et $\sum_{n=0}^{N}(a_n)^+$ divergent, il existe une infinité d'entiers $n\in\mathbb{N}$ tels que $a_n>0$, aussi et une infinité tels que $a_n<0$. Écrivons ces ensembles (disjoints) respectivement $\{p_k; k\in\mathbb{N}\}$ et $\{n_i; i\in\mathbb{N}\}$, avec $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ strictement croissantes. Par définition, tout entier $n\in\mathbb{N}$ tel que $a_n\neq 0$ s'écrit ou bien $n=p_k$ ou bien $n=n_i$. Pour simplifier, on supposera que tous les a_n sont non nuls. On sait que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{p_k}=+\infty$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n_k}=-\infty$. Ceci implique en particulier qu'il existe $K_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$s_0 := \sum_{k=0}^{K_0} a_{p_k} + a_{n_0} \geq n_0\,.$$

De même, on peut construire par récurrence une suite $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que

$$s_i := \sum_{k=K_{i-1}+1}^{K_i} a_{p_k} + a_{n_i} \geq n_i$$

pour tout $i\geq 1$. Comme nécessairement n_i tend vers $+\infty$ quand $i\to+\infty$, la série de terme général s_i diverge.

On procède de façon analogue pour effectuer une sommation par paquets de sorte que la série de terme général s_i converge vers une valeur $\ell\in\mathbb{R}$ arbitraire (pour $\ell=-\infty$, échanger les rôles des termes positifs et des termes négatifs ci-dessus). En effet, il existe $K_0\in\mathbb{N}$ et $I_0\in\mathbb{N}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{K_0} a_{p_k} > \ell\,,\quad \sum_{k=0}^{K_0} a_{p_k} + \sum_{i=0}^{I_0} a_{n_i} < \ell\,.$$

De même, on peut construire par récurrence des suites strictement croissantes $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{k=0}^{K_{m+1}} a_{p_k} + \sum_{i=0}^{I_m} a_{n_i} > \ell$, $\sum_{k=0}^{K_{m+1}} a_{p_k} + \sum_{i=0}^{I_{m+1}} a_{n_i} < \ell$, de sorte que

$$\ell + a_{n_{I_{m+1}}} < S_m := \sum_{k=0}^{K_{m+1}} a_{p_k} + \sum_{i=0}^{I_{m+1}} a_{n_i} < \ell\,.$$

Comme I_m tend vers $+\infty$ quand $m\to+\infty$, n_i tend vers $+\infty$ quand $i\to+\infty$, et a_n tend vers zéro quand $n\to+\infty$ (sinon $\sum a_n$ ne convergerait pas), on en déduit que (S_m) tend vers ℓ quand $m\to+\infty$.

c) D'après le a), si une série est absolument convergente elle est commutativement convergente. Si une série est commutativement convergente dans un espace de dimension finie, d'après le b) appliqué à ses composantes dans une base quelconque, elle est nécessairement absolument convergente.

d) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{n+1}(\delta_{in})_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$ quel que soit $p\in[1,+\infty]$, avec

$$\|a_n\|_{\ell^p(\mathbb{N})} = \frac{1}{n+1}\,.$$

Par suite, comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=+\infty$, la série $\sum a_n$ n'est normalement convergente dans aucun espace $\ell^p(\mathbb{N})$. En revanche, on a va voir qu'elle est commutativement convergente (mais avec une somme dépendant de la permutation). Voyons déjà la convergence. La valeur à l'indice $i\in\mathbb{N}$ de la somme partielle $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ est $S_N(i) = 0$ si $N < i$ et $S_N(i) = 1/(i+1)$ si $N \geq i$. Si l'on note $h = (\frac{1}{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$, c'est un élément de $\ell^2(N) \cap \ell^\infty(\mathbb{N})$ (mais pas de $\ell^1(\mathbb{N})$!), et

$$(S_N - h)(i) = \begin{cases} -1/(i+1) & \text{si } \; N < i\,, \\ 0 & \text{si } \; N \geq i\,. \end{cases}$$

Par suite,

$$\|S_N - h\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})} \;=\; \frac{1}{N+2} \quad \text{et} \|S_N - h\|^2_{\ell^2(\mathbb{N})} \;=\; \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)^2}\,.$$

Ces deux expressions tendant vers zéro lorsque $N \to \infty$, ceci montre que S_N tend vers h à la fois dans $\ell^2(\mathbb{N})$ et dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Plus généralement, si l'on note $S_N^\sigma = \sum_{n=0}^{N} a_{\sigma(n)}$ pour $\sigma \in S(\mathbb{N})$, et $h^\sigma := (\frac{1}{\sigma^{-1}(i)+1})_{i\in\mathbb{N}}$, on a

$$\|S_N^\sigma - h^\sigma\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})} \;=\; \max_{i \notin \{\sigma(0),\ldots,\sigma(N)\}} \frac{1}{\sigma^{-1}(i)+1} \;=\; \frac{1}{N+2}\,,$$

$$\|S_N^\sigma - h^\sigma\|^2_{\ell^2(\mathbb{N})} \;=\; \sum_{i \notin \{\sigma(0),\ldots,\sigma(N)\}} \frac{1}{(\sigma^{-1}(i)+1)^2} \;=\; \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)^2}$$

(d'après le a)). Donc S_N^σ tend vers h^σ dans $\ell^2(\mathbb{N})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$.