Agrégation de Mathématiques
Préparation à l'écrit d'Analyse
Année 2012-2013

Feuille d'exercices 2

Corrigé de l'exercice 1. (*Limite supérieure et limite inférieure*)

a) Pour simplifier, introduisons la notation $S_n = \{u_p\,;\, p \geq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par définition, ces ensembles S_n forment une suite décroissante pour l'inclusion : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} \subset S_n$. Par suite, $a_n := \inf S_n$ et $b_n := \sup S_n$ forment des suites de réels respectivement croissantes et décroissantes. Ceci justifie que les limites utilisées pour la définition de $\overline{\lim}(u_n)$ et $\underline{\lim}(u_n)$ existent (dans $\overline{\mathbb{R}}$ si l'on ne suppose pas la suite (u_n) bornée) :

$$\underline{\lim}(u_n) = \sup\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}\,, \quad \overline{\lim}(u_n) = \inf\{b_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

On a donc en particulier

$$\inf\{u_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} = a_0 \leq \sup\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} = \underline{\lim}(u_n)\,,$$

$$\overline{\lim}(u_n) = \inf\{b_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \leq b_0 = \sup\{u_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Pour montrer que $\underline{\lim}(u_n) \leq \overline{\lim}(u_n)$, il suffit de passer à la limite dans l'inégalité $a_n \leq b_n$, valable quel que soit n. (On a même $a_n \leq b_m$ quels que soient les entiers naturels n et m, car si $m \leq n$ alors $a_n \leq u_n \leq b_m$, et si $m \geq n$ alors $a_n \leq u_m \leq b_m$.) On a donc bien la suite d'inégalités

$$\inf\{u_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \leq \underline{\lim}(u_n) \leq \overline{\lim}(u_n) \leq \sup\{u_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}\,,$$

Maintenant, si $\overline{\lim}(u_n) = \underline{\lim}(u_n) = \lambda$ alors, quel que soit $\varepsilon > 0$ (par définition des bornes supérieures et inférieures) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda - \varepsilon \leq a_N \leq \lambda$ et il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda \leq b_M \leq \lambda + \varepsilon$, d'où

$$\lambda - \varepsilon \leq a_N \leq u_n \leq b_M \leq \lambda + \varepsilon$$

pour tout $n \geq \max(N, P)$, ce qui signifie que la suite (u_n) converge vers λ. Montrons que dans tous les cas, $\overline{\lim}(u_n)$ et $\underline{\lim}(u_n)$ sont des valeurs d'adhérence de cette suite. À nouveau par définition des bornes supérieures et inférieures et du fait que la suite (a_n) est croissante, quel que soit $q \in \mathbb{N}$ il existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq q + 1$ tel que

$$\underline{\lim}(u_n) - 2^{-q} \leq u_p \leq \underline{\lim}(u_n) + 2^{-q}$$

(on ferait de même pour $\overline{\lim}(u_n)$; le choix de 2^{-q} est purement arbitraire, on pourrait utiliser le terme général de n'importe quelle autre suite tendant vers 0). On peut ainsi construire une suite d'entiers (p_k) strictement croissante (et donc tendant vers l'infini !) telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\underline{\lim}(u_n) - 2^{-p_k} \leq u_{p_{k+1}} \leq \underline{\lim}(u_n) + 2^{-p_k}\,,$$

de sorte que la suite extraite (u_{p_k}) converge vers $\underline{\lim}(u_n)$. Par suite, $\underline{\lim}(u_n)$ est bien une valeur d'adhérence de (u_n) (de même que $\overline{\lim}(u_n)$). Supposons maintenant que $\ell = \lim(u_{\varphi(n)})$ soit une autre valeur d'adhérence, avec $\varphi = \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors, puisque $\varphi(n) \geq n$ quel que soit n, on a $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$, d'où en passant à la limite,

$$\underline{\lim}(u_n) \leq \ell \leq \overline{\lim}(u_n)\,.$$

Ceci prouve que $\underline{\lim}(u_n)$ est la plus petite et $\overline{\lim}(u_n)$ est la plus grande des valeurs d'adhérence de (u_n). Attention, contrairement aux limites, les limites inférieure et supérieure ne sont *pas des notions linéaires.* On a en particulier

$$\underline{\lim}(-u_n) = -\,\overline{\lim}(u_n)\,, \quad \overline{\lim}(-u_n) = -\,\underline{\lim}(u_n)\,,$$

et les inégalités

$$\underline{\lim}(u_n) + \underline{\lim}(v_n) \leq \underline{\lim}(u_n + v_n)\,, \quad \overline{\lim}(u_n + v_n) \leq \overline{\lim}(u_n) + \overline{\lim}(v_n)\,,$$

sont strictes en général, comme on le voit sur l'exemple de $u_n = (-1)^n$, $v_n = (-1)^{n+1}$. Ce sont des égalités si l'une des deux suites converge. En effet, supposons par exemple que (u_n) converge, alors en écrivant $v_n = u_n + v_n - u_n$ on déduit des inégalités ci-dessus que

$$\underline{\lim}(u_n + v_n) - \lim(u_n) \leq \underline{\lim}(v_n), \quad \overline{\lim}(v_n) \leq \overline{\lim}(u_n + v_n) - \lim(v_n),$$

d'où finalement

$$\lim(u_n) + \underline{\lim}(v_n) = \underline{\lim}(u_n + v_n), \quad \overline{\lim}(u_n + v_n) = \lim(u_n) + \overline{\lim}(v_n).$$

b) D'après le lemme de Fatou, on a

$$\int_X \underline{\lim}(|f(x)| + |f_n(x)| - |f(x) - f_n(x)|)\, d\mu \leq \underline{\lim} \int_X (|f(x)| + |f_n(x)| - |f(x) - f_n(x)|)\, d\mu.$$

D'après les hypothèses, l'intégrale de gauche vaut $2\int_X |f(x)| d\mu$, et la limite inférieure à droite vaut $2\int_X |f(x)| d\mu - \overline{\lim} \int_X |f(x) - f_n(x)|)\, d\mu$. Par suite, on a

$$0 \leq \overline{\lim} \int_X |f(x) - f_n(x)|)\, d\mu \leq 0,$$

et donc

$$\lim \int_X |f(x) - f_n(x)|)\, d\mu = 0.$$

Pour résumer, cet exercice montre que « convergence simple + convergence de la norme L^1 implique convergence dans L^1 ».

Corrigé de l'exercice 2. (*Exemples de séries de Fourier*)

a) On remarque que $f = g'$. Les coefficients de Fourier de f sont $c_0 = 0$ et pour $n \neq 0$,

$$c_n = \int_0^{1/2} \mathrm{e}^{-2i\pi n x}\, \mathrm{d}x - \int_{1/2}^1 \mathrm{e}^{-2i\pi n x}\, \mathrm{d}x = i\,\frac{(-1)^n - 1}{\pi n}.$$

Par suite, sa série de Fourier est

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \mathrm{e}^{2i\pi n x} = \sum_{n\geq 1} c_n\, \mathrm{e}^{2i\pi n x} + \sum_{n\leq -1} c_n\, \mathrm{e}^{2i\pi n x} = \sum_{n\geq 1} 2\,i\,c_n \sin(2\pi n x)$$

puisque $c_n = -c_{-n}$. Les coefficients de Fourier de g sont $C_0 = 1/4$ et pour $n \neq 0$,

$$C_n = \int_0^1 g(x)\, \mathrm{e}^{-2i\pi n x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\,i\,\pi\, n} \int_0^1 f(x)\, \mathrm{e}^{-2i\pi n x}\, \mathrm{d}x = \frac{c_n}{2\,i\,\pi\, n}$$

par intégration par parties, c'est-à-dire

$$C_n = \frac{(-1)^n - 1}{2\,\pi^2\, n^2}.$$

b) On peut démontrer que la série de Fourier de f converge en utilisant la règle d'Abel qui, rappelons le, revient à faire une « intégration par parties discrète ». En effet, puisque la série de terme général $1/n - 1/(n+1) = 1/(n(n+1))$ est absolument convergente, il suffit de vérifier que

$$\Big|\sum_{n=1}^N ((-1)^n - 1)\sin(2\pi n x)\Big| = \Big|\sum_{n=1}^N \sin((2x+1)\pi n) - \sin(2x\pi n)\Big|$$

est bornée. Or la somme ci-dessus vaut 0 pour $x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, et si $x \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=1}^N \sin((2x+1)n\pi) - \sin(2xn\pi) = \mathsf{Im}\Big(\sum_{n=0}^N \mathrm{e}^{(2x+1)\pi n} - \mathrm{e}^{2x\pi n}\Big)$$

$$= \mathsf{Im}\Big(\frac{\mathrm{e}^{(2x+1)\pi(N+1)} - 1}{\mathrm{e}^{(2x+1)\pi} - 1} - \frac{\mathrm{e}^{2x\pi(N+1)} - 1}{\mathrm{e}^{2x\pi} - 1}\Big) = \frac{\sin^2((2x+1)\pi(N+1)/2)}{\sin((2x+1)\pi/2)} - \frac{\sin^2(x\pi(N+1))}{\sin(x\pi)},$$

ce qui est majoré en valeur absolue par
$$\frac{1}{|\sin((2\,x\,+\,1)\,\pi/2)|}+\frac{1}{|\sin(x\,\pi)|}\,.$$
Quant à la série de Fourier de g,
$$\sum_{n\in Z} C_n\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,n\,x}=\frac{1}{4}+\sum_{n\geq 1} C_n\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,n\,x}+\sum_{n\leq -1} C_n\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,n\,x}=\frac{1}{4}+\sum_{n\geq 1} 2\,C_n\,\cos(\,2\,\pi\,n\,x)$$
puisque $C_n = C_{-n}$, elle est normalement convergente puisque la série de terme général $1/n^2$ est (absolument) convergente.

c) La convergence plus forte de la série de Fourier de g par rapport à celle de f traduit le fait que g est plus régulière que f.

Corrigé de l'exercice 3. (*Séries entières/séries de Fourier*)

a) Rappelons que par définition du rayon de convergence R, pour tout réel positif $r < R$, la série de terme général $a_n r^n$ converge. Par suite, la série de terme général $a_n r^n \mathrm{e}^{in\theta}$ converge normalement pour la norme du sup des fonctions de θ continues et bornées sur $\mathbb{R}$. A fortiori, cette série converge donc uniformément.

b) Par définition, $f(r\mathrm{e}^{i\theta}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(r\mathrm{e}^{i\theta})^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{in\theta}$. Comme la convergence est uniforme, on peut intervertir $\int$ et $\sum$ dans la définition de ses coefficients de Fourier :
$$c_n(f)=\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta=\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(m-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta=a_n\,r^n$$
si $n\in\mathbb{N}$ et $c_n(f)=0$ si $n<0$.

c) D'après la formule de Parseval, on a
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2=\int_0^{2\pi}|f(r\mathrm{e}^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta\,,$$
et cette intégrale est majorée par $\sup_{|z|=r}|f(z)|^2$. Donc chaque terme de la somme ci-dessus est majoré par $\sup_{|z|=r}|f(z)|^2$, d'où l'on déduit les inégalités demandées.

d) D'après les hypothèses,
$$|a_n|\leq\frac{C}{r^n\,(1-r)^\alpha}\,,$$
quel que soit $r\in]0,1[$. En particulier, pour $r = 1 - 1/n$, on a
$$|a_n|\leq\frac{C\,n^\alpha}{(1-1/n)^n}\,,$$
où le dénominateur tend vers e^{-1} lorsque $n\to\infty$ (rappelons au passage la formule d'Euler : quel que soit $z\in\mathbb{C}$, $\lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n=\mathrm{e}^z$).

Corrigé de l'exercice 4. (*Séries de Dirichlet*)

a) La convergence absolue impliquant la convergence tout court, quel que soit x tel que $\sum a_n\,n^{-x}$ converge absolument, on a $x\geq\sigma_c$, d'où $\sigma_a\geq\sigma_c$ en passant à l'inf. Par ailleurs, si $\sum a_n\,n^{-x}$ converge, si $y=x+1+\varepsilon>x+1$ alors $u_n(y)=u_n(x)n^{-1-\varepsilon}$ avec $u_n(x)$ bornée et $\sum_n n^{-1-\varepsilon}$ convergente, donc $\sum u_n(y)$ est donc absolument convergente, et par suite, $y\geq\sigma_a$. Ceci étant vrai quel que soit $y>x+1$, on en déduit $x+1\geq\sigma_a$, et finalement $\sigma_c+1\geq\sigma_a$ en passant à l'inf.

Pour $a_n = 1$ on a $\sigma_a=\sigma_c$ puisqu'alors $u_n(x)>0$ quel que soient n et x. Pour $a_n=(-1)^n$, $\sigma_a = 1$ et $\sigma_c = 0$ (par la transformation d'Abel et le fait que, par comparaison avec une intégrale par exemple, $\sum_{n\geq 1}|(n+1)^{-x}-n^{-x}|\leq x\sum_{n\geq 1}n^{-x-1}<+\infty$ pour $x>0$).

b) Si $\sum u_n(z_0)$ est convergente et $\mathsf{Re}\, z > \mathsf{Re}\, z_0$, on peut montrer que $\sum u_n(z)$ est convergente à nouveau grâce à la transformation d'Abel. En effet, $\sum_{n=1}^N u_n(z_0)$ est bornée, et

$$u_n(z) \;=\; u_n(z_0)\, n^{-(z-z_0)}\,,$$

avec

$$\sum_{n\geq 1} |(n+1)^{-(z-z_0)} - n^{-(z-z_0)}| \leq |z-z_0| \sum_{n\geq 1} n^{-\mathsf{Re}(z-z_0)-1} < +\infty\,.$$

c) Si $\mathsf{Re}\, z > \sigma_c$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathsf{Re}\, z > x > \sigma_c$ et $\sum u_n(x)$ converge. Donc $\sum u_n(z)$ converge, d'après la question précédente. Si $\mathsf{Re}\, z < \sigma_c$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathsf{Re}\, z < x < \sigma_c$. Si $\sum u_n(z)$ convergeait, alors d'après la question précédente, $\sum u_n(x)$ convergerait aussi, ce qui est impossible par définition de σ_c.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $z \mapsto u_n(z)$ est holomorphe. Pour montrer que la somme de la série de fonctions $\sum u_n$ est holomorphe sur $\Omega := \{z\,;\ \mathsf{Re}\, z > \sigma_c\}$, il suffit (grâce au théorème de Morera) de démontrer que cette série converge uniformément sur tout compact de Ω. Or si K est un compact inclus dans Ω, il existe $s > \sigma_c$ tel que $\mathsf{Re}\, z \geq s$ quel que soit $z \in K$. Soient alors $x \in]\sigma_c, s[$, et M un majorant de $|z-x|$ pour $z \in K$. En écrivant $u_n(z) = u_n(x)\, n^{-(z-x)}$ et en faisant une transformation d'Abel comme à la question b), on voit que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur K car :

- les sommes partielles de la série réelle $\sum u_n(x)$ sont bornées (puisque $x > \sigma_c$, $\sum u_n(x)$ converge),
- la suite $(n^{-(z-x)})$ converge uniformément vers zéro sur K (pour $z \in K$, $|n^{-(z-x)}| \leq n^{-(s-x)}$),
- et la série $\sum_{n\geq 1} |(n+1)^{-(z-x)} - n^{-(z-x)}|$ converge uniformément sur K :

$$\sum_{n=m}^{m+p} |(n+1)^{-(z-x)} - n^{-(z-x)}| \leq M \sum_{n=m}^{m+p} n^{-(s-x)-1} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$