Agrégation de Mathématiques
Préparation à l'écrit d'Analyse
Année 2012-2013

Feuille d'exercices 3

Préambule.

***Équations de Cauchy-Riemann*:** Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, une fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \Omega & \to & \mathbb{C} \\ & z = x + iy & \mapsto & f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \end{array}$$

différentiable comme fonction des deux variables réelles (x, y) est holomorphe si et seulement si $u = \mathrm{Re} f$ et $v = \mathrm{Im} f$ vérifient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}\,, \end{cases}$$

en tout point de Ω.

***Principe du maximum*:** Le théorème 10.24 dans Rudin dit que si Ω est un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$, si f est holomorphe dans Ω et n'est pas constante, alors la fonction $|f|$ n'admet pas de maximum local dans Ω. Par conséquent, si $\overline{\Omega}$ est compact et si f est holomorphe dans Ω, continue sur $\overline{\Omega}$, alors pour tout $z \in \Omega$,

$$|f(z)| \leq \max_{\partial\Omega} |f|\,.$$

***Transformation conforme*:** On appelle ainsi une application holomorphe et bijective d'un *domaine* (= ouvert connexe non vide) de $\mathbb{C}$ dans un autre. (Sa réciproque étant automatiquement holomorphe d'après le théorème de l'image ouverte, cf théorème 10.32 p. 209 dansRudin)
Théorème de Riemann (cf Rudin, théorème 14.8 p. 330) : Quel que soit le domaine Ω simplement connexe de $\mathbb{C}$ autre que $\mathbb{C}$, il existe une transformation conforme de Ω sur le disque unité ouvert.

***Séries de fonctions holomorphes*:** Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions holomorphes sur un domaine Ω telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact de Ω, alors sa somme f est holomorphe dans Ω (en effet, d'après le théorème de Cauchy, cf Rudin, théorème 10.13 p. 248, quel que soit le triangle Δ inclus dans Ω, on a $\int_{\partial\Delta} f_n = 0$ pour tout n, ce qui implique d'après le théorème d'interversion de $\sum$ et $\int$ pour les séries uniformément convergentes, $\int_{\partial\Delta} f = 0$; d'après le théorème de Morera, cf Rudin théorème 10.17 p. 251, ceci montre que f est holomorphe).

***Intégrales à paramètre complexe*:** Si f est une fonction de $(x, z) \in X \times \Omega$, où X est un espace mesurable et Ω est un domaine de $\mathbb{C}$, telle que pour tout $z \in \Omega$, $f(\cdot, z) \in L^1(X)$, pour presque tout $x \in X$ la fonction $z \mapsto f(x, z)$ est holomorphe, et pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $g \in L^1(X)$ telle que

$$|f(x,z)| \leq g_K(x) \quad \forall z \in K\,,$$

alors la fonction

$$F : z \mapsto \int_X f(x,z)\,\mathrm{d}x$$

est holomorphe dans Ω. (En effet, si Δ est un triangle inclus dans Ω, on a $\int_X \int_{\partial\Delta} |f(x,z)|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \leq |\Delta| \int_X g_\Delta(x)\,\mathrm{d}x$, ce qui implique d'après le théorème de Cauchy et le théorème de Fubini que $\int_{\partial\Delta} F(z)\,\mathrm{d}z = 0$; donc F est holomorphe d'après le théorème de Morera). Attention, pour dériver F sous le signe somme, il faut aussi dominer $\partial f/\partial z$.

Corrigé de l'exercice 1. (*Lemme des trois droites d'Hadamard*)

a) La fonction $\widetilde{f} : z \mapsto \widetilde{f}(z) := f(z)\, M_0^{z-1}\, M_1^{-z}$ est holomorphe dans $\mathring{B}$ comme produit de fonctions holomorphes, bornée sur B comme produit de fonctions bornées (noter que $|M_0^{z-1}\, M_1^{-z}| = M_0^{\mathsf{Re}\, z-1}\, M_1^{-\,\mathsf{Re}\, z} \leq \max(1, M_0)\, \max(1, M_1)$), et $|f(z)|$ est majoré par $M_0 M_0^{-1} = 1$ pour $z \in i\mathbb{R}$ et par $M_1 M_1^{-1} = 1$ pour $z \in 1 + i\mathbb{R}$. Par suite, $\widetilde{f}$ vérifie les hypothèses avec $M_0 = M_1 = 1$. De plus, si l'on montre que $|\widetilde{f}|$ est majorée par 1 dans B, on en déduira la majoration voulue pour $|f|$.

b) Si
$$\lim_{\delta\to\infty} \max_{\gamma\in[0,1]} |f(\gamma + i\delta)| = 0$$
alors il existe $m > 0$ tel que $|f(\gamma + i\delta)| < 1$ pour $(\gamma, |\delta|) \in [0, 1] \times [m, +\infty[$. Par ailleurs, d'après le principe du maximum appliqué à f dans le rectangle $R_m := [0, 1] \times [-m, m]$, quel que soit $z \in R_m$,
$$|f(z)| \leq \max_{\partial R_m} |f| \leq 1$$
d'après l'hypothèse concernant les bords verticaux de R_m et par définition de m pour les bords horizontaux.

c) La fonction f_n est holomorphe sur $\mathring{B}$ comme produit de fonctions holomorphes, $|f_n(z)| = |f(z)|\, \mathrm{e}^{\mathsf{Re}(z^2)/n}\, \mathrm{e}^{-1/n}$ est majoré dans B comme f puisque $\mathrm{e}^{\mathsf{Re}(z^2)/n} \leq \mathrm{e}^{1/n}$ pour tout $z \in B$. En outre,
$$\max_{\gamma\in[0,1]} f_n(\gamma + i\delta) \;\leq\; \mathrm{e}^{-\delta^2/n} \sup_{z\in B} |f(z)|$$
tend vers zéro lorsque δ tend vers l'infini. Donc d'après le b), $|f_n|$ est majorée par 1 sur B quel que soit n. En faisant tendre n vers l'infini on en déduit que $|f|$ est aussi majorée par 1 sur B.

Corrigé de l'exercice 2. (*Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin*)

a) Tout d'abord, quelles que soient les fonctions f et g continues à support compact, on a $Tf \in L^{q_0}(U, d\nu) \cap L^{q_1}(U, d\nu)$ et $g \in L^{q_0'}(U, d\nu) \cap L^{q_1'}(U, d\nu)$, de sorte que leur produit $(Tf)\, g$ appartient à $L^1(U, d\nu)$. Supposons que l'on ait démontré l'inégalité
$$|\langle Tf, g\rangle| \;\leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}\,,$$
quelles que soient les fonctions f et g continues à support compact telles que $\|f\|_{L^p(\Omega,d\mu)} = \|g\|_{L^{q'}(U,d\nu)} = 1$. Par linéarité de l'intégrale et de T, ceci montre que
$$|\langle Tf, g\rangle| \;\leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}\, \|f\|_{L^p(\Omega,d\mu)}\, \|g\|_{L^{q'}(U,d\nu)}$$
quelles que soient les fonctions f et g continues à support compact. L'espace $\mathscr{C}_c(U)$ étant dense dans $L^{q'}(U, d\nu)$ (car $q' < +\infty$ d'après les hypothèses $q_0 \neq q_1$ et $\theta \in]0, 1[$, qui impliquent $q \in]1, +\infty[$) , ceci montre que $g \mapsto \langle Tf, g\rangle$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $L^{q'}(U, d\nu)$, de norme inférieure à $M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}\, \|f\|_{L^p(\Omega,d\mu)}$. Par le théorème de représentation de Riesz (cf Brézis p. 61), cette forme linéaire s'identifie à Tf et on a
$$\|Tf\|_{L^q(U,d\nu)} \;\leq\; M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}\, \|f\|_{L^p(\Omega,d\mu)}\,.$$
En utilisant maintenant la densité de $\mathscr{C}_c(\Omega)$ dans $L^p(\Omega, d\mu)$ (d'après les hypothèses $p_0 \neq p_1$ et $\theta \in]0, 1[$, on a $p \in]1, +\infty[$), on voit que T se prolonge comme application linéaire continue de $L^p(\Omega, d\mu)$ dans $L^q(U, d\nu)$ avec une norme inférieure à $M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$.

b) À x et y fixés tels que $f(x) \neq 0$ et $g(y) \neq 0$, les fonctions
$$z \mapsto \varphi(x, z) = f(x)|f(x)|^{p((1-z)/p_0+z/p_1-1/p)}\,,\; z \mapsto \psi(y, z) = g(y)|g(y)|^{q'(1/q-(1-z)/q_0-z/q_1)}\,,$$
sont holomorphes dans $\mathbb{C}$ (on dit aussi *entières*). De plus, on a
$$|\varphi(x, z)| \;=\; |f(x)|^{((1-\mathsf{Re}\, z)/p_0+\mathsf{Re}\, z/p_1)p} \;=\; |f(x)|^{p/p(\mathsf{Re}\, z)}\,,$$

$$|\psi(y,z)| = |g(y)|^{((1-\mathsf{Re}\,z)/q_0'+\mathsf{Re}\,z/q_1')q'} \;=\; |g(y)|^{q'/q(\mathsf{Re}\,z)'}\,.$$

Donc pour $z\in \mathring{B} = \{z\in\mathbb{C}\,;\mathsf{Re}\,z\in]0,1[\}$, les fonctions $x\mapsto\varphi(x,z)$ et $x\mapsto\psi(x,z)$ admettent des prolongements par continuité aux points où respectivement f et g s'annulent. Ainsi :

- à $z\in\mathring{B}$ fixé, $x\mapsto\varphi(x,z)$ et $y\mapsto\psi(y,z)$ sont des fonctions continues à support compact, leurs supports étant respectivement celui de f et de g.
- à x et y fixés, $z\mapsto\varphi(x,z)$ et $z\mapsto\psi(y,z)$ sont holomorphes dans $\mathring{B}$.

Ceci permet déjà de définir

$$\langle T\varphi(\cdot,z),\psi(\cdot,z)\rangle \;:=\; \int T\varphi(y,z)\,\psi(y,z)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

pour $z\in\mathring{B}$, puisqu'alors $T\varphi(\cdot,z)\in L^{q_0}(U,d\nu)\cap L^{q_1}(U,d\nu)$ et $\psi(\cdot,z)\in L^{q_0'}(U,d\nu)\cap L^{q_1'}(U,d\nu)$ et donc $T\varphi(\cdot,z)\,\psi(\cdot,z)\in L^1(U,d\nu)$. Pour montrer que l'application $z\mapsto\langle T\varphi(\cdot,z),\psi(\cdot,z)\rangle$ est holomorphe dans $\mathring{B}$ on ne peut pas invoquer directement le théorème de Lebesgue car on n'a pas d'estimation ponctuelle de $T\varphi(y,z)$. On peut néanmoins démontrer « à la main » que

$$\frac{\partial}{\partial z}\langle T\varphi(\cdot,z),\psi(\cdot,z)\rangle = \langle T\partial_z\varphi(\cdot,z),\psi(\cdot,z)\rangle \;+\; \langle T\varphi(\cdot,z),\partial_z\psi(\cdot,z)\rangle\,.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}\partial_z\varphi(x,z) \;&=\; \dot p\,\varphi(x,z)\,\ln|f(x)|\,,\quad \dot p := p(1/p_1-1/p_0)\,,\\ \partial_z\psi(y,z) \;&=\; \dot q\,\psi(y,z)\,\ln|g(y)|\,,\quad \dot q := q'(1/q_0-1/q_1)\,,\end{aligned}$$

ces égalités étant vraies en prolongeant $\varphi(\cdot,z)\ln|f|$ et $\psi(\cdot,z)\ln|g|$ par continuité aux points au f et g s'annulent (ce qui est possible car $\lim_{t\to0}|t|^\alpha\ln|t| = 0$ pour $\alpha>0$, et $p/p(\mathsf{Re}\,z)>0$, $q'/q(\mathsf{Re}\,z)'>0$ pour $z\in\mathring{B}$). Par suite, $\partial_z\varphi(\cdot,z)$ et $\partial_z\psi(\cdot,z)$ sont continues à support compact, et appartiennent donc à $L^{p_0}(\Omega,d\mu)\cap L^{p_1}(\Omega,d\mu)$ et $L^{q_0'}(U,d\nu)\cap L^{q_1'}(U,d\nu)$ respectivement. On démontre même que les applications $z\in\mathring{B}\mapsto\varphi(\cdot,z)\in L^{p_0}(\Omega,d\mu)\cap L^{p_1}(\Omega,d\mu)$, $z\in\mathring{B}\mapsto\psi(\cdot,z)\in L^{q_0'}(U,d\nu)\cap L^{q_1'}(U,d\nu)$ sont holomorphes. En effet, par exemple en ce qui concerne φ (l'argument étant analogue pour ψ) :

$$\begin{aligned}|\varphi(x,z+h)-\varphi(x,z)-h\partial_z\varphi(x,z)| \;&=\; |\varphi(x,z)|\,\Big||f(x)|^{\dot p h}-1-\dot p h\ln|f(x)|\Big|\\ &\le |f(x)|^{p/p(\mathsf{Re}\,z+h)}\,(\dot p h\ln|f(x)|)^2\end{aligned}$$

d'après l'inégalité $|\mathrm{e}^t-1-t|\le t^2e^t$. Or, pour $1>\beta\ge\mathsf{Re}\,z\ge\alpha>0$ et $|h|\le\min(\alpha/2,(1-\beta)/2)$,

$$0<\;\frac{\alpha}{2p_1}+\frac{1-\beta}{2p_0}\;\le\;\frac{1}{p(\mathsf{Re}\,z+h)}\;\le\;\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_1}\;-\;\frac{\alpha}{2p_0}\;-\;\frac{1-\beta}{2p_1}\,,$$

d'où l'existence d'une constante $M>0$ (dépendant « seulement » de α, β, p, p_0 et p_1) telle que

$$|f(x)|^{p/p(\mathsf{Re}\,z+h)}(\dot p\ln|f(x)|)^2\;\le\;M\,\mathbf{1}_{\mathrm{supp}f}(x)\,.$$

Par suite,

$$\frac{1}{h}\,\|\varphi(\cdot,z+h)-\varphi(\cdot,z)-h\partial_z\varphi(\cdot,z)\|_{L^{p_i}}\;\le\;h\,|\mathrm{supp}\ f|^{1/p_i}\;\longrightarrow 0\,,\quad h\to0\,.$$

En outre, les formules données plus haut permettent de définir $\varphi(x,z)$ et $\psi(y,z)$ pour tous $x,y\in\mathbb{R}^n$ et $z\in B$, quitte à convenir que $0^0=0$ pour définir $\varphi(x,z)$ aux points x où f s'annule et $\mathsf{Re}\,z=0$ dans le cas $p_0=\infty$ ou $\mathsf{Re}\,z=1$ dans le cas $p_1=\infty$, ainsi que pour définir $\psi(y,z)$ aux points y où g s'annule et $\mathsf{Re}\,z=0$ dans le cas $q_0'=\infty$ ou $\mathsf{Re}\,z=1$ dans le cas $q_1'=\infty$. On obtient de cette manière des applications continues

$$\begin{array}{rcl} B_0 & \to & L^{p_0}(\Omega,d\mu)\,,\\ z & \mapsto & \varphi(\cdot,z)\,,\end{array}\qquad \begin{array}{rcl} B_0 & \to & L^{q_0'}(U,d\nu)\,,\\ z & \mapsto & \psi(\cdot,z)\,,\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} B_1 & \to & L^{p_1}(\Omega,d\mu)\,,\\ z & \mapsto & \varphi(\cdot,z)\,,\end{array}\qquad \begin{array}{rcl} B_1 & \to & L^{q_1'}(U,d\nu)\,,\\ z & \mapsto & \psi(\cdot,z)\,,\end{array}$$

où $B_0 := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, z \in [0,1[\}$ et $B_1 := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, z \in]0,1]\}$. D'après l'inégalité de Hölder et les hypothèses sur T, on a donc

$$|\langle T\varphi(\cdot,z), \psi(\cdot,z)\rangle| \leq \|T\varphi(\cdot,z)\|_{L^{q_0}} \|\psi(\cdot,z)\|_{L^{q_0'}} \leq M_0 \|\varphi(\cdot,z)\|_{L^{p_0}} \|\psi(\cdot,z)\|_{L^{q_0'}}, \ z \in B_0,$$

$$|\langle T\varphi(\cdot,z), \psi(\cdot,z)\rangle| \leq \|T\varphi(\cdot,z)\|_{L^{q_1}} \|\psi(\cdot,z)\|_{L^{q_1'}} \leq M_1 \|\varphi(\cdot,z)\|_{L^{p_1}} \|\psi(\cdot,z)\|_{L^{q_1'}}, \ z \in B_1.$$

On en déduit la continuité et une borne uniforme de $z \mapsto \langle T\varphi(\cdot,z), \psi(\cdot,z)\rangle$ sur la bande fermée B. Pour l'existence d'une borne uniforme, on remarque que $\|\varphi(\cdot,z)\|_{L^{p_i}} = \|\varphi(\cdot, \mathrm{Re}\, z)\|_{L^{p_i}}$, $\|\psi(\cdot,z)\|_{L^{q_i'}} = \|\psi(\cdot, \mathrm{Re}\, z)\|_{L^{q_i'}}$ pour $z \in B_i$. En particulier, pour $\mathrm{Re}\, z = 0$,

$$|\varphi(x,z)| = |f(x)|^{p/p_0}, \quad |\psi(y,z)| = |g(y)|^{q'/q_0'},$$

d'où

$$\|\varphi(\cdot,z)\|_{L^{p_0}} = \|f\|_{L^p}^{p/p_0} = 1, \quad \|\psi(\cdot,z)\|_{L^{q_0'}} = \|g\|_{L^{q'}}^{q'/q_0'} = 1,$$

tandis que pour $\mathrm{Re}\, z = 1$,

$$\|\varphi(\cdot,z)\|_{L^{p_1}} = \|f\|_{L^p}^{p/p_1} = 1, \quad \|\psi(\cdot,z)\|_{L^{q_1'}} = \|g\|_{L^{q'}}^{q'/q_1'} = 1.$$

Donc l'application $z \mapsto \langle |T\varphi(\cdot,z), \psi(\cdot,z)\rangle|$ est majorée par M_0 pour $\mathrm{Re}\, z = 0$ et par M_1 pour $\mathrm{Re}\, z = 1$. On a donc tous les ingrédients pour appliquer le lemme des trois droites d'Hadamard.

c) On a donc

$$|\langle T\varphi(\cdot,z), \psi(\cdot,z)\rangle| \leq M_0^{1-\mathrm{Re}\, z} M_1^{\mathrm{Re}\, z}$$

quel que soit $z \in B$ et en particulier pour $z = \theta$. Or, pour cette valeur de z, on a justement $\varphi(\cdot,z) = f$ et $\psi(\cdot,z) = g$. Donc

$$|\langle Tf, g\rangle| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

Corrigé de l'exercice 3. (*Construction de « plateaux »*)

a) Par définition, H_a est à valeurs positives ou nulles, d'intégrale 1 et à support dans $[0,a]$. On en déduit que, quels que soient a, $b > 0$, $H_a * H_b$ est à valeurs positives ou nulles, d'intégrale 1 (par le théorème de Fubini), et à support compact inclus dans $[0, a+b]$. Une récurrence immédiate montre alors que u_n est à valeurs positives ou nulles, d'intégrale 1, et à support compact inclus dans $[0, a_0 + \cdots a_n]$. Par hypothèse sur la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, u_n est donc à support dans $[0,a]$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs,

$$u_1(x) = \frac{1}{a_1} \int_{x-a_1}^{x} H_{a_0}(t)\, \mathrm{d}t,$$

donc u_1 est continue. En écrivant de façon analogue

$$u_{n+1}(x) = \frac{1}{a_{n+1}} \int_{x-a_{n+1}}^{x} u_n(t)\, \mathrm{d}t, \tag{A}$$

on en déduit par récurrence que u_n est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ quel que soit $n \geq 1$. L'équation (A) montre en outre que

$$u_{n+1}'(x) = \frac{1}{a_{n+1}} (u_n(x) - u_n(x - a_{n+1})),$$

d'où

$$\|u_{n+1}'\|_\infty \leq \|u_n'\|_\infty$$

par le théorème des accroissements finis, et ainsi

$$\|u_n'\|_\infty \leq \|u_2'\|_\infty \quad \forall n \geq 2.$$

Pour la même raison (en dérivant autant de fois que nécessaire),

$$\|u_n^{(j)}\|_\infty \leq \|u_{j+1}^{(j)}\|_\infty \quad \forall n \geq j+1.$$

Ceci va nous permettre de démontrer que, quel que soit $j \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)_{n\geq j+2}$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathscr{C}^j([0,a])$. Voyons déjà le cas $j=1$. On a

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{1}{a_{n+1}} \int_{x-a_{n+1}}^{x} (u_n(t) - u_n(x))\,\mathrm{d}t\,,$$

$$u'_{n+1}(x) - u'_n(x) = \frac{1}{a_{n+1}} \int_{0}^{a_{n+1}} (u'_n(x+t) - u'_n(x))\,\mathrm{d}t\,,$$

d'où (par l'inégalité de la moyenne et le théorème des accroissements finis)

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq a_{n+1}\,\|u'_n\|_\infty \leq a_{n+1}\,\|u'_2\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

$$|u'_{n+1}(x) - u'_n(x)| \leq a_{n+1}\,\|u''_n\|_\infty \leq a_{n+1}\,\|u''_3\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

pour tout $n \geq 3$. Comme la série $\sum a_n$ converge, ceci implique en effet que $(u_n)_{n\geq 3}$ est de Cauchy dans $\mathscr{C}^1([0,a])$. Le cas général $j \geq 2$ se traite de façon tout à fait analogue. Ainsi, la limite u de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme de classe $\mathscr{C}^\infty$, à support dans $[0,a]$, à valeurs positives ou nulles et d'intégrale 1.

b) Il s'agit ici de construire une fonction plateau à partir de u. On a

$$(\mathbf{1}_I * u)(x) \;=\; \int_I u(x-y)\,\mathrm{d}y$$

par définition, ce qui vaudra 1 si $[0,a] \subset x - I$. Ainsi, pour que $(\mathbf{1}_I * u)(x) = 1$ quel que soit $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, il suffit de choisir $I = [-a-\varepsilon, \varepsilon]$. On voit de plus que $\mathbf{1}_I * u$ est à support dans $I + [0,a] = [-a-\varepsilon, a+\varepsilon]$.

c) D'après la question précédente, en choisissant $a = \varepsilon$, la fonction w définie par $w(x) = v(\|x\|)$ est à support dans la boule de rayon 2ε et vaut 1 dans la boule de rayon ε. Elle est donc $\mathscr{C}^\infty$ en 0, et $\mathscr{C}^\infty$ ailleurs par composition avec $x \mapsto \|x\|$.

d) Par changement d'échelle on peut ramener la fonction w de la question précédente à une fonction $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ à support dans la boule de rayon 1 et d'intégrale 1. Alors ρ_ε est aussi d'intégrale 1 par la formule de changement de variable.

e) Pour tout $x \in K$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule de centre x et de rayon 2ε soit incluse dans U. Par compacité, il existe $x_1, \dots x_k$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i;\varepsilon)$. Par translation de la fonction w de la question c), on obtient des fonctions φ_i de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support dans $B(x_i;2\varepsilon)$ et valant 1 dans $B(x_i;\varepsilon)$. Alors ψ définie par

$$\psi(x) \;=\; 1 \;-\; (1 \;-\; \varphi_1(x)) \;\dots\; (1 \;-\; \varphi_k(x))$$

répond à la question.

Corrigé de l'exercice 4. (*Convolution dans les espaces L^p*)

a) On peut supposer sans perte de généralité que f et g sont boréliennes. On montre alors que la fonction $F : (x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est borélienne (voir par exemple [Rudin, démonstration du théorème 8.14 p. 208]). De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |F(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \;=\; \|g\|_{L^1}\,\|f\|_{L^1}\,.$$

Donc $F \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$. D'après le théorème de Fubini ceci implique que $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^{2n}} |F(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^1}\,.$$

b) Si $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ alors $g^p \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et la question précédente montre que $y \mapsto f(x-y)\,g(y)^p$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et

$$\||f| * |g|^p\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^p}^p\,.$$

En décomposant

$$|f(x-y)\,g(y)| = \left(|f(x-y)|^{1/p}\,|g(y)|\right)|f(x-y)|^{1/p'}$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\,g(y)|\,\mathrm{d}y \;\le\; \left((|f| * |g|^p)(x)\right)^{1/p}\,\|f\|_{L^1}^{1/p'}\,,$$

c'est-à-dire encore

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\,g(y)|\,\mathrm{d}y\right)^p \;\le\; (|f| * |g|^p)(x)\,\|f\|_{L^1}^{p/p'}\,.$$

En intégrant en x et en utilisant l'inégalité $\||f| * |g|^p\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^p}^p$ donnée ci-dessus on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\,g(y)|\,\mathrm{d}y\right)^p \mathrm{d}x \;\le\; \|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^p}^p\,\|f\|_{L^1}^{p/p'}\,.$$

Ceci montre que $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\,g(y)|\,\mathrm{d}y\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \;\le\; \|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^p}\,.$$

c) (*inégalité de Young*) Si $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur de convolution par g est linéaire continu de L^1 dans L^p et de norme inférieure ou égale à $\|g\|_{L^p}$ d'après la question précédente. Par ailleurs, d'après l'inégalité de Hölder, l'opérateur de convolution par g est aussi linéaire continu de $L^{p'}$ dans L^∞ et de norme inférieure ou égale à $\|g\|_{L^p}$. Donc d'après le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, cet opérateur de convolution est continu de L^q dans L^r avec

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p'} + 1 - \theta\,, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p}\,, \quad \theta \in [0,1]\,,$$

ou encore, après élimination de θ,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\,.$$

La symétrie de cette relation en p et q montre qu'on peut aussi définir $g * f \in L^r$ pour la même valeur de r. Le fait que $f * g = g * f$ se déduit aisément du changement de variables $y \mapsto x - y$ si l'on peut appliquer la formule intégrale

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

C'est le cas pour $q = 1$ d'après la question b), ou $q = p'$ d'après l'inégalité de Hölder. Dans le cas général, c'est plus délicat (la « construction » par interpolation n'a rien de symétrique puisqu'on a fixé g). L'application bilinéaire $(f,g) \in L^q \times L^p \mapsto f * g \in L^r$ étant continue par construction, pour montrer qu'elle est symétrique il suffit de montrer qu'elle l'est sur un sous-espace dense. Ceci règle les cas où p et q sont finis, en considérant $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n)$ comme sous-espace dense, sur lequel on a la symétrie par changement de variables dans la formule intégrale. Une façon de voir la symétrie dans tous les cas repose sur l'identité suivante, quel que soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\text{(I)} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \iint f(z)\,g(y)\,\varphi(z+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,.$$

Noter que l'intégrale de gauche a bien un sens si $f \in L^q$, $g \in L^p$ avec $1 \le p, q \le \infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \ge 0$, puisqu'alors $f * g \in L^r$ et que toute fonction φ continue à support compact appartient à

$L^{r'}$, donc son produit avec $f*g$ est intégrable d'après l'inégalité de Hölder. L'intégrale de droite dans (I) a également un sens : la fonction $(z,y)\mapsto f(z)\,g(y)\,\varphi(z+y)$ est intégrable car

$$\int |f(z)| \left(\int |g(y)\,\varphi(z+y)|\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z \;=\; \int |f(z)|(|\check{g}|*|\varphi|)(z)\,\mathrm{d}z$$

avec $\check{g}: y\mapsto g(-y)$, et $f\in L^q$ par hypothèse, tandis que $|\check{g}|*|\varphi|\in L^{q'}$ puisque $\check{g}\in L^p$, $\varphi\in L^{r'}$ et $\frac{1}{q'}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r'}-1$. Dans les cas « extrêmes » $(q,r)=(1,p)$ (comprenant le seul cas où $p=+\infty$ compatible avec l'inégalité $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\geq 0$, à savoir $(q,r)=(1,+\infty)$) et $(q,r)=(p',+\infty)$ on obtient l'identité (I) ci-dessus directement par changement de variable (et le théorème de Fubini) :

$$\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \iint f(x-y)\,g(y)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \;=\; \iint f(z)\,g(y)\,\varphi(z+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,.$$

Si l'on note T_g l'opérateur de convolution par g on a donc

$$\langle T_g f,\varphi\rangle = \iint f(z)\,g(y)\,\varphi(z+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$$

au moins dans les cas $(q,r)=(1,p)$ et $(q,r)=(p',+\infty)$. Par ailleurs, l'opérateur

$$S_g: f\in L^q(\mathbb{R}^n)\mapsto S_g f:\varphi\in L^{r'}(\mathbb{R}^n)\mapsto \iint f(z)\,g(y)\,\varphi(z+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$$

est continu de L^q dans le dual de $L^{r'}$ (grâce aux inégalités $|\langle S_g f,\varphi\rangle|\leq \|f\|_{L^q}\||\check{g}|*|\varphi|\|_{L^{q'}}\leq \|f\|_{L^q}\|g\|_{L^p}\,\|\varphi\|_{L^{r'}}$). Les cas extrêmes donnent que pour tout $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $S_g f$ coïncide avec $T_g f$ vu comme un élément du dual de $L^{p'}$, qui s'identifie avec L^p (si l'on exclut le cas très particulier $p=+\infty$, $q=1$, $r=+\infty$), tandis que pour tout $f\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, $S_g f$ coïncide avec $T_g f$ vu comme un élément du dual de L^1, qui s'identifie à L^∞. Par interpolation, pour $f\in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{1}{q}\in]\frac{1}{p'},1[$, $S_g f$ coïncide donc nécessairement avec $T_g f$ vu comme un élément du dual de $L^{r'}$, qui s'identifie à L^r avec $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\in]0,\frac{1}{p}[$.

d) Si $f\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est à support dans K et $g\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $(f*g)(x)$ est défini pour tout x par

$$(f*g)(x) \;=\; \int_K f(y)\,g(x-y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_{x-K} f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

On peut dériver sous le signe $\int$ autant de fois qu'on veut car, pour x de norme disons inférieure à R, la fonction $y\mapsto \partial^\alpha f(x-y)\,g(y)$ est dominée par la fonction intégrable $y\mapsto \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty}\,\mathbf{1}_{K_R}(y)\,|g(y)|$ où

$$K_R \;:=\; \{y\in\mathbb{R}^n\,;\,d(-y,K)\leq R\}\,.$$

e) Par définition, supp f est le complémentaire du plus grand ouvert dans lequel f s'annule presque partout. D'autre part, $\overline{\{x\,;\;f(x)\neq 0\}}$ est le complémentaire de l'intérieur de $\{x\,;\;f(x)=0\}$, c'est-à-dire le complémentaire du plus grand ouvert dans lequel f soit identiquement nulle. Or, si f est continue et nulle presque partout dans un ouvert, elle est identiquement nulle dans cet ouvert (car alors l'ensemble des points où f ne s'annule pas est un ouvert de mesure nulle donc réduit à l'ensemble vide). Donc les deux notions coïncident : $\operatorname{supp} f=\overline{\{x\,;\;f(x)\neq 0\}}$.

Notons $F:=\overline{\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g}$, et U son complémentaire. Par définition du support, montrer que $\operatorname{supp}(f*g)\subset F$ revient simplement, comme U est ouvert, à montrer que $f*g=0$ presque partout dans U.

C'est assez facile si l'on peut appliquer la formule intégrale

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

car on a alors

$$(f*g)(x) \;=\; \int_{\operatorname{supp} g} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

pour presque tout x. Si x n'appartient pas à supp f + supp g, la fonction $y \in \text{supp } g \mapsto f(x-y)$ est nulle presque partout, donc $(f*g)(x) = 0$.

De façon générale, montrer que $f*g = 0$ presque partout dans U revient à montrer que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(U)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0\,.$$

Grâce à l'identité (I) montrée à la question c), on est donc ramené à montrer que

$$\text{(O)} \qquad \iint_{(z+y)\in U} f(z)\,g(y)\,\varphi(z+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \;=\; 0\,.$$

Par définition de l'ouvert U, si $(z+y) \in U$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\inf\{\|z+y \;-\; (u+v)\|\,;\; u \in \text{supp } f\,,\; v \in \text{supp } g\} \geq \varepsilon\,,$$

d'où nécessairement

$$\inf\{\|z \;-\; u\|\,;\; u \in \text{supp } f\} \geq \varepsilon/2 \;\text{ ou }\; \inf\{\|y \;-\; v\|\,;\; v \in \text{supp } g\} \geq \varepsilon/2\,.$$

Dans le premier cas on en déduit que $f = 0$ presque partout dans la boule de centre z et de rayon $\varepsilon/2$, dans le second cas, $g = 0$ presque partout dans la boule de centre y et de rayon $\varepsilon/2$, d'où $f(t)\,g(w) = 0$ pour presque tout (t,w) dans la boule de centre (z,y) et de rayon $\varepsilon/2$. Par suite, la fonction $(z,y) \mapsto f(z)\,g(y)$ est nulle presque partout au voisinage de tout point de l'ouvert $\{(z,y)\,;\; z+y \in U\}$. On en déduit bien sûr (O).

Corrigé de l'exercice 5. (*Densité dans L^p*)

a) Puisque la mesure de Lebesgue est régulière, il existe un compact K et et un ouvert U tels que $K \subset B \subset U$ et

$$\lambda_n(U) \;-\; \varepsilon/2 < \lambda_n(B) < \lambda_n(K) \;+\; \varepsilon/2\,.$$

D'après l'exercice 3e), il existe $\zeta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta \equiv 1$ sur K et ζ à support dans U. Si on désigne par A le borélien $U \backslash K$, sa mesure est $\lambda_n(U) \;-\; \lambda_n(K) < \varepsilon$, et $\zeta - \mathbf{1}_B$ vaut 0 dans K et à l'extérieur de U, tandis que pour $x \in A$, $\zeta(x)$ et $\mathbf{1}_B(x) \in [0,1]$, d'où $|\zeta(x) - \mathbf{1}_B(x)| \;\leq\; 1 \;=\; \mathbf{1}_A(x)$.

b) Dans la question précédente, le même raisonnement est valable si B est « seulement » Lebesgue mesurable (par régularité de la mesure de Lebesgue).

c) L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ si p est fini. La question précédente montre que ζ est une approximation de la fonction caractéristique $\mathbf{1}_B$ à $\varepsilon^{1/p}$ près :

$$\|\zeta \;-\; \mathbf{1}_B\|_{L^p} \;\leq\; \|\mathbf{1}_A\|_{L^p} \;<\; \varepsilon^{1/p}\,.$$

L'ensemble des fonctions continues à support compact n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$: sinon, la limite uniforme d'une suite de fonctions continue étant continue, toute fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ admettrait un représentant continu (ce qui n'est pas le cas des fonctions caractéristiques par exemple).

d) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < \infty$ et $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|f-g\|_{L^p} \leq \varepsilon$. Ainsi

$$\|f*\rho_\varepsilon - f\|_{L^p} \;\leq\; \|g*\rho_\varepsilon - g\|_{L^p} \;+\; \|f-g\|_{L^p} \;+\; \|(f-g)*\rho_\varepsilon\|_{L^p} \;\leq\; \|g*\rho_\varepsilon - g\|_{L^p} \;+\; 2\varepsilon$$

puisque quel que soit $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\rho_\varepsilon * h\|_{L^p} \;\leq\; \|\rho_\varepsilon\|_{L^1}\,\|h\|_{L^p} \;=\; \|h\|_{L^p}\,.$$

Donc il suffit de montrer que $g*\rho_\varepsilon \to g$ dans L^p. Or par définition du produit de convolution, comme ρ_ε est d'intégrale 1,

$$\begin{aligned}(g*\rho_\varepsilon)(x) \;-\; g(x) \;&=\; \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)\,(g(x-y) \;-\; g(x))\,\mathrm{d}y \\ &=\; \int_{\text{supp}\rho} \rho(z)\,(g(x-\varepsilon z) \;-\; g(x))\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

par changement de variable. Comme g est continue, cette intégrale tend vers zéro avec ε. La convergence est même uniforme sur tout compact, par continuité uniforme de g sur les compacts. Par ailleurs, on a une majoration (grossière) de $|g*\rho_\varepsilon - g|$ par $h := |g| + \|g\|_\infty \mathbf{1}_K \in L^p$ avec $K = \overline{\operatorname{supp} g + \operatorname{supp} \rho}$. Étant donné $\delta > 0$, il existe un compact K_δ tel que $\|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus K_\delta)} \leq \delta$, d'où

$$\|g*\rho_\varepsilon - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \delta + \|(g*\rho_\varepsilon)(x) - g\|_{L^p(K_\delta)}\,,$$

et comme $g*\rho_\varepsilon$ converge uniformément vers g sur K_δ quand $\varepsilon \to 0$, on a $\|g*\rho_\varepsilon - g\|_{L^p(K_\delta)} \leq \delta$ pour ε assez petit. Ceci montre que $\|g*\rho_\varepsilon - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ tend vers zéro quand $\varepsilon \to 0$.

D'après la question 4d), la fonction $f_\varepsilon := (\mathbf{1}_{B(0;1/\varepsilon)} f) * \rho_\varepsilon$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ puisque c'est le cas de ρ_ε. D'après la question 4e), elle est de plus à support compact, inclus dans $\overline{B(0;1/\varepsilon) + B(0;\varepsilon)} \subset \overline{B(0;1/\varepsilon + \varepsilon)}$. Par ailleurs,

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^p} \leq \|f*\rho_\varepsilon - f\|_{L^p} + \|(\mathbf{1}_{\{x\,;\,\|x\|\geq 1/\varepsilon\}} f) * \rho_\varepsilon\|_{L^p}\,.$$

D'après la première partie de la question, le premier terme tend vers zéro avec ε, et le second vérifie

$$\|(\mathbf{1}_{\{x\,;\,\|x\|\geq 1/\varepsilon\}} f) * \rho_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|\mathbf{1}_{\{x\,;\,\|x\|\geq 1/\varepsilon\}} f\|_{L^p}\,,$$

ce qui tend vers zéro avec ε puisque $f \in L^p$.

e) Pour justifier l'existence de ψ_ε on applique la question 3e) à la boule fermée de rayon $1/\varepsilon$ comme compact et à la boule ouverte de rayon $2/\varepsilon$ comme ouvert. De plus,

$$\begin{aligned}\|\psi_\varepsilon \cdot (f*\rho_\varepsilon) - f\|_{L^p} &\leq \|\psi_\varepsilon \cdot (f*\rho_\varepsilon - f)\|_{L^p} + \|(\psi_\varepsilon - 1)\, f\|_{L^p} \\ &\leq \|f*\rho_\varepsilon - f\|_{L^p} + \|\mathbf{1}_{\{x\,;\,\|x\|\geq 1/\varepsilon\}} f\|_{L^p}\,.\end{aligned}$$

On a déjà vu que ces deux quantités tendaient vers zéro avec ε.

f) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\psi_\varepsilon \cdot (f*\rho_\varepsilon) \to f$ dans L^∞, alors f admet un représentant continu g (l'argument est le même qu'à la question 5c). De plus, g tend vers zéro à l'infini car quel que soit $\eta > 0$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |\psi_\varepsilon \cdot (f*\rho_\varepsilon) - g| \leq \eta\,,$$

d'où l'on déduit que $|g(x)| \leq \eta$ pour $\|x\| \geq 1/(2\varepsilon)$. Réciproquement, si $f = g$ presque partout alors $f*\rho_\varepsilon = g*\rho_\varepsilon$. Si de plus g tend vers zéro à l'infini, étant donné $\eta > 0$, il existe $R > 0$ tel que $|g(x)| \leq \eta$ pour $\|x\| \geq R$. Montrons alors qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |\psi_\varepsilon \cdot (g*\rho_\varepsilon) - g| \leq 2\eta\,.$$

Pour fixer les idées, supposons que ρ soit à support dans la boule de rayon 1. Alors, pour tout $\varepsilon \leq 1$ et pour $\|x\| \geq R+1$, on a

$$|(g*\rho_\varepsilon)(x)| = \left|\int_{\|z\|\leq 1} \rho(z)\, g(x - \varepsilon z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \eta\, \|\rho\|_{L^1} = \eta\,,$$

donc

$$|\psi_\varepsilon(x) \cdot (g*\rho_\varepsilon)(x) - g(x)| \leq 2\eta\,.$$

Voyons maintenant le cas des x tels que $\|x\| \leq R+1$. Si $\varepsilon \leq \varepsilon_1 := 1/2(R+1)$, $\psi_\varepsilon(x) = 1$ pour $\|x\| \leq R+1$, donc

$$\psi_\varepsilon(x)(g*\rho_\varepsilon)(x) - g(x) = (g*\rho_\varepsilon)(x) - g(x) = \int_{\|z\|\leq 1} \rho(z)\,(g(x-\varepsilon z) - g(x))\,\mathrm{d}z\,.$$

Comme g est uniformément continue sur la boule fermée de rayon $R+2$, on déduit de cette égalité qu'il existe $\varepsilon_0 \leq \min(1, \varepsilon_1)$ tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, et pour tout x tel que $\|x\| \leq R+1$,

$$|\psi_\varepsilon(x)(g*\rho_\varepsilon)(x) - g(x)| \leq \eta\,.$$

g) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, il existe une famille (f_ε) de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact telles que f_ε tend vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ lorsque ε tend vers zéro. Quel que soit $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon * g$ est $\mathscr{C}^\infty$, et on a

$$\|f_\varepsilon * g - f * g\|_{L^\infty} \; = \; \|(f_\varepsilon - f) * g\|_{L^\infty} \; \leq \; \|f_\varepsilon - f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^{p'}}$$

par l'inégalité de Hölder. Donc $f*g$ coïncide presque partout avec une fonction continue, à savoir la limite uniforme de la famille de fonction continues $(f_\varepsilon * g)$.

Corrigé de l'exercice 6. (*Partition de l'unité*) D'après la question 3e) il existe des fonctions $\varphi_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\varphi_j \equiv 1$ sur K et φ_j à support dans U_j. Elles ne répondent pas tout à fait à la question à cause du point iii). Cependant, il suffit de poser

$$\psi_1 = \varphi_1\,, \quad \psi_2 = (1-\varphi_1)\,\varphi_2\,, \quad \ldots \quad , \, \psi_l \;=\; (1-\varphi_1)\ldots(1-\varphi_{l-1})\,\varphi_l\,,$$

car alors

$$\psi_1 \,+\, \cdots \,+\, \psi_l \;=\; 1 \,-\, (1-\varphi_1)\ldots(1-\varphi_l)\,.$$

Corrigé de l'exercice 7. (*Classe de Schwartz*)

a) Les $p_{\alpha\beta}$ sont des semi-normes car, quels que soient φ, $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|x^\beta \partial^\alpha(\varphi+\psi)(x)| \leq |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| + |x^\beta \partial^\alpha \psi(x)| \leq p_{\alpha\beta}(\varphi) + p_{\alpha\beta}(\psi)\,, \quad |x^\beta \partial^\alpha(\lambda\varphi)(x)| = |\lambda||x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)|\,,$$

d'où

$$p_{\alpha\beta}(\varphi+\psi) \leq p_{\alpha\beta}(\varphi) + p_{\alpha\beta}(\psi)\,, \quad p_{\alpha\beta}(\lambda\varphi) = |\lambda||x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)|$$

en passant à la borne supérieure.

b) Par définition, la topologie induite par les semi-normes $p_{\alpha\beta}$ est la topologie la moins fine (c'est-à-dire celle avec le moins d'ouverts possible) rendant les applications $p_{\alpha\beta} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+$ continues. En particulier tout ensemble de la forme

$$\mathscr{V}_{a,b,\varepsilon}(\varphi_0) := \{\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\,;\; p_{\alpha\beta}(\varphi - \varphi_0) \;<\; \varepsilon \quad \forall(\alpha,\beta)\,, |\alpha| \leq a\,, |\beta| \leq b\}$$

avec $a, b \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, doit être un ouvert. Par définition de la notion de topologie, toute réunion d'intersections finies de tels ouverts doit aussi être un ouvert. La famille d'ouverts ainsi construite définit bien une topologie, c'est-à-dire qu'elle est stable par réunion quelconque et par intersection finie (la vérification en est laissée au lecteur : c'est le même exercice de théorie des ensembles qui sert à la construction de la topologie faible dans un espace vectoriel normé).

Pour montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est séparé, considérons deux éléments distincts φ_1 et φ_2. Ils s'agit de trouver deux ouverts disjoints U_1 et U_2 contenant respectivement φ_1 et φ_2. Puisque $\varphi_1 \neq \varphi_2$, il existe x_0 tel que $\varphi_1(x_0) \neq \varphi_2(x_0)$. Soient alors $\varepsilon := |\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0)|/2 > 0$, $U_1 := \mathscr{V}_{0,0,\varepsilon}(\varphi_1)$ et $U_2 := \mathscr{V}_{0,0,\varepsilon}(\varphi_2)$: s'il existait $\varphi \in U_1 \cap U_2$ on aurait

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi_1(x)| + |\varphi(x) - \varphi_2(x)| < 2\varepsilon = |\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0)|$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$.

La démonstration du fait que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est complet demande a priori plus de travail. Tout d'abord, notons qu'une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente vers φ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si, quel que soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, la suite numérique $(p_{\alpha\beta}(\varphi_k - \varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro. De façon analogue, une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si quel que soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ $p_{\alpha\beta}(\varphi_p - \varphi_q)$ tend vers zéro lorsque p et q tendent vers l'infini. On voit ainsi que si $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, quel que soit le compact K de $\mathbb{R}^n$, quel que soit $m \in \mathbb{N}$, la suite $((\varphi_k)_{|K})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathscr{C}^m(K)$. Ce dernier espace étant complet, $((\varphi_k)_{|K})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{C}^m(K)$. En considérant une infinité de compacts K recouvrant $\mathbb{R}^n$ (par exemple des boules fermées), on obtient ainsi (par unicité de la limite) une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $((\varphi_k)_{|K})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi_{|K}$ dans $\mathscr{C}^m(K)$ quels que soient m et K. En particulier, $(\partial^\alpha \varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\partial^\alpha \varphi$ sur $\mathbb{R}^n$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Il reste à vérifier que φ est bien un élément de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et que la convergence vers φ a lieu dans cet espace. Soient $\varepsilon > 0$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$. Par hypothèse il existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour $p, q \geq k_\varepsilon$,

$$p_{\alpha\beta}(\varphi_p - \varphi_q) \leq \varepsilon\,.$$

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|x^\beta \partial^\alpha (\varphi_p - \varphi_q)(x)| \leq \varepsilon\,.$$

En faisant tendre q vers $+\infty$, on en déduit

$$|x^\beta \partial^\alpha (\varphi_p - \varphi)(x)| \leq \varepsilon\,,$$

d'où

$$p_{\alpha\beta}(\varphi_p - \varphi) \leq \varepsilon\,,$$

ce qui permet de conclure.

c) L'ingrédient principal est le fait que la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est définie par une quantité dénombrable de semi-normes. On peut par exemple définir comme distance entre deux éléments φ et ψ de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$d(\varphi, \psi) := \sum_{(\alpha,\beta)} 2^{-|\alpha|-|\beta|} \min\,(1, p_{\alpha\beta}(\varphi - \psi))\,.$$

Pour vérifier que la topologie d'espace métrique définie par d coïncide avec celle définie par les semi-normes $p_{\alpha\beta}$, il suffit de s'assurer que la convergence des suites est équivalente. Supposons donc que $p_{\alpha\beta}(\varphi_k - \varphi)$ converge vers zéro quel que soit (α, β). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|>N} 2^{-|\alpha|-|\beta|} \leq \varepsilon\,,$$

et il existe $\kappa \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq \kappa$,

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|\leq N} 2^{-|\alpha|-|\beta|} p_{\alpha\beta}(\varphi_k - \varphi) \leq \varepsilon\,,$$

d'où

$$d(\varphi_k, \varphi) \leq 2\varepsilon\,.$$

Inversement, supposons que $d(\varphi_k, \varphi)$ tende vers zéro. Alors quel que soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$,

$$2^{-|\alpha|-|\beta|} \min\,(1, p_{\alpha\beta}(\varphi_k - \varphi)) \leq d(\varphi_k, \varphi)$$

tend vers zéro. Ceci implique que $p_{\alpha\beta}(\varphi_k - \varphi)$ tend vers zéro (car pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ il existe $\kappa \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq \kappa$, $\min\,(1, p_{\alpha\beta}(\varphi_k - \varphi)) \leq \varepsilon$, d'où $\min\,(1, p_{\alpha\beta}(\varphi_k - \varphi)) = p_{\alpha\beta}(\varphi_k - \varphi) \leq \varepsilon$).

d) Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour l'approcher par des fonctions de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ il suffit de la « tronquer » convenablement. D'après l'exercice 3e) il existe $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, valant 1 sur la boule fermée unité. Considérons alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\psi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\psi_k(x) = \psi(x/k)\,.$$

Elle vaut 1 sur la boule de rayon k. De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a

$$\sup_{k\in\mathbb{N}^*} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \psi_k(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \psi(x)|\,.$$

On montre alors que $\psi_k\varphi$ tend vers φ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ lorsque k tend vers l'infini. En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\alpha(\varphi - \psi_k\varphi) = \partial^\alpha((1 - \psi_k)\varphi)$$

est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $\partial^{(\alpha-\gamma)}(1 - \psi_k)\,\partial^\gamma\varphi$ avec $\gamma \leq \beta$ (au sens des composantes), fonctions qui par hypothèse sur ψ s'annulent sur la boule de rayon k. Donc il existe $C > 0$ (dépendant seulement de α et ψ) tel que

$$p_{\alpha\beta}(\varphi - \psi_k\varphi) \leq C \sup_{|x|>k} \sup_{\gamma\leq\alpha} |x^\beta \partial^\gamma \varphi(x)| \leq C \sup_{\gamma\leq\alpha} p_{\gamma\delta}(\varphi)\, k^{-\delta+\beta}$$

pour $\delta > \beta$.

e) Soient $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et un entier $s > n$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \mathrm{d}x \,\leq\, \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \,(1+\|x\|)^s \,|\varphi(x)| \,\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x\|)^s}\,,$$

où l'intégrale est finie (car $s > n$) et le sup aussi : il existe $C > 0$ (dépendant seulement de s et n) tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \,(1+\|x\|)^s \,|\varphi(x)| \,\leq \max_{|\beta|\leq s} p_{0,\beta}(\varphi)\,.$$

Notons de plus que si $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0$, φ est nulle presque partout, et comme elle est continue, elle est identiquement nulle. Ceci montre que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.