Université Claude Bernard LYON 1 **Automne 2007**

Devoir maison en Math I Analyse : corrigé

Exercice 1

- Soit $A = \left\{ \dfrac{x^n}{x^n+1}\,;\; x \in]0,+\infty[\,,\; n \in \mathbb{N} \right\}$. Par définition, pour tout $y \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ tels que $y = \frac{x^n}{x^n+1}$, et comme $0 < x^n < x^n + 1$ on a donc $0 < y < 1$. Ceci montre que 0 est un minorant de A et que 1 est un majorant de A. De plus, à n fixé,

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{x^n}{x^n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{x^n+1} = 1$$

(on pourrait aussi choisir de fixer $x < 1$ ou $x > 1$ et faire tendre n vers $+\infty$), donc A n'admet pas de plus grand minorant que 0 et pas de plus petit majorant que 1. (Raisonner par l'absurde : en supposant par exemple que A admet un minorant strictement plus grand que 0, montrer qu'il y a une contradiction avec $\lim_{x\searrow 0} \frac{x^n}{x^n+1} = 0$.) Ainsi A admet 0 comme borne inférieure et 1 comme borne supérieure.

- Soit $B = \left\{ \dfrac{x^n}{|x^n-1|}\,;\; x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\,,\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Par définition, pour tout $y \in B$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, $x \neq 1$, tels que $y = \frac{x^n}{|x^n-1|}$. Donc (comme pour l'ensemble A ci-dessus), 0 est un minorant de B, et c'est sa borne inférieure car, à n fixé,

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{x^n}{|x^n-1|} = 0\,.$$

En revanche, B n'est pas majoré puisque, à n fixé,

$$\lim_{x \xrightarrow{\neq} 1} \frac{x^n}{|x^n-1|} = +\infty\,.$$

Donc B n'admet pas de borne supérieure.

- Soit $C = \left\{ \dfrac{x^n}{x^n+1}\,;\; x \in]0,+\infty[\,,\; n = E(x) + E(1/x) \right\}$. Comme pour l'ensemble A, 0 est un minorant de C et 1 est un majorant. De plus, on remarque que pour $0 < x < 1$, $E(x) + E(1/x) = E(1/x) \geq 1$, et donc $0 < x^{E(x)+E(1/x)} \leq x$, d'où

$$0 < \frac{x^{E(x)+E(1/x)}}{x^{E(x)+E(1/x)}+1} \leq x\,,$$

ce qui montre par comparaison (« théorème des gendarmes » pour les fonctions) que

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{x^{E(x)+E(1/x)}}{x^{E(x)+E(1/x)}+1} = 0\,.$$

Par conséquent, 0 est la borne inférieure de C. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on a $E(n) = n$ et $E(1/n) = 0$, et donc $u_n := \frac{n^n}{n^n+1}$ appartient à C. Or $n^n \geq n$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^n = +\infty$, d'où par composition de limites $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$. Ceci montre que 1 est la borne supérieure de C.

Exercice 2

1. Soit $u_0 = \frac{1}{5} \in]0,1[$. On suppose que $(u_1, \ldots, u_k)$ sont des réels appartenant à l'intervalle $]0,1[$ satisfaisant la relation de récurrence
$$u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1-u_n}\right)$$
pour tout $n \leq k$. Alors le réel
$$u_{k+1} := \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1-u_k}\right)$$
est bien défini puisque $1 - u_k > 0$. De plus, il est strictement positif puisque $1 - u_k < 1$, ce qui implique $\sqrt{1-u_k} < 1$. Enfin
$$1 - u_{k+1} = \frac{1}{5}\left(4 + \sqrt{1-u_k}\right) < \frac{1}{5}(4+1) = 1\,.$$

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{5}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par construction
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1-u_n} - 5u_n\right).$$
et par conséquent, si $u_n \leq \frac{1}{5}$, l'inégalité $u_{n+1} - u_n \leq 0$ est équivalente à $(1-5u_n)^2 \leq 1 - u_n$. Or on a $(1-5x)^2 < 1-x$ quel que soit $x \in]0, 1/5]$. (Il suffit de développer le carré et constater que $25x - 9 < 0$ puisque $5 < 9$!) Comme $u_0 = \frac{1}{5}$, on en déduit directement $u_1 \leq u_0$, et si on fait l'hypothèse de récurrence $u_n \leq u_{n-1} \leq \frac{1}{5}$ pour $n \geq 1$, on obtient $u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{5}$.

3. D'après ce qui précède, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par 0 et majorée par $\frac{1}{5}$. Elle est donc convergente vers une limite $\ell \in [0, \frac{1}{5}]$. Pour calculer cette limite on observe que $\lim(u_{n+1}) = \lim(u_n) = \ell$ et que, puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1-x}\right)$ est continue sur $[0, \frac{1}{5}]$,
$$\lim \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1-u_n}\right) = \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1-\ell}\right).$$
Par unicité de la limite on a donc
$$\ell = \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1-\ell}\right),$$
d'où $(1-5\ell)^2 = 1 - \ell$, c'est-à-dire encore $\ell(25\ell - 9) = 0$. Comme $25/9 > 1/5$ (inégalité utilisée plus haut !), on a nécessairement $\ell = 0$.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les trois suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par
$$v_n = u_{2n}\,, \quad w_n = u_{2n+1}\,, \quad x_n = u_{3n}\,, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,,$$
convergent.

1. La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car $u_{6n} = v_{\varphi(n)}$ avec $\varphi : n \mapsto 3n$ strictement croissante) et une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car $u_{6n} = x_{\psi(n)}$ avec $\psi : n \mapsto 2n$ strictement croissante). Une suite extraite d'une suite convergente ayant la même limite, la suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et aussi vers la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par unicité de la limite, les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont donc même limite.
2. On observe que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont également une suite extraite commune, à savoir $(u_{3(2n+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ (car $u_{3(2n+1)} = x_{2n+1} = w_{3n+1}$), et elles ont donc la même limite. Comme $\lim(x_n) = \lim(v_n)$, on a donc $\lim(w_n) = \lim(v_n)$.
3. D'après un théorème du cours, puisque les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |\sin(x) - \sin(y)|.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a, d'après l'hypothèse appliquée à $y = x + 2\pi$,

$$0 \leq |f(x) - f(x+2\pi)| \leq |\sin(x) - \sin(x+2\pi)| = 0$$

   (puisque sin est 2π périodique) et donc $f(x) - f(x+2\pi) = 0$. Ceci montre que la fonction est 2π périodique.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque sin est continue, il existe $\eta \geq 0$ tel que pour $|x - x_0| \leq \eta$, $|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq \varepsilon$. Or, par hypothèse, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |\sin(x) - \sin(x_0)|.$$

   On en déduit que pour $|x - x_0| \leq \eta$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Par définition de la limite, ceci montre que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
3. On veut montrer que

$$\lim_{x \overset{\neq}{\to} \pi/2} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2}$$

   existe. Or on sait que sin est dérivable en $\pi/2$ et $\sin'(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$. Donc

$$\lim_{x \overset{\neq}{\to} \pi/2} \frac{\sin(x) - \sin(\pi/2)}{x - \pi/2} = 0.$$

   Et d'après l'hypothèse, pour tout $x \neq \pi/2$,

$$0 \leq \left|\frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2}\right| \leq \left|\frac{\sin(x) - \sin(\pi/2)}{x - \pi/2}\right|.$$

   Donc par comparaison

$$\lim_{x \overset{\neq}{\to} \pi/2} \left|\frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2}\right| = 0,$$

d'où aussi (par application immédiate de la définition de la limite),

$$\lim_{x \xrightarrow{\neq} \pi/2} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} = 0\,.$$

Ainsi f est dérivable en $\pi/2$ et $f'(\pi/1) = 0$.

Exercice 5

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = x^n - (1-x)^2.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) La fonction f_n est dérivable et pour tout $x \in [0,1]$,
   $$f_n'(x) = nx^{n-1} + 2(1-x) \geq 0$$
   (comme somme de deux termes positifs). Donc f_n est croissante.
   (b) On a $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$. Comme f est continue (car les fonctions puissances $x \mapsto x^k$, $x \mapsto x^2$ et la fonction affine $x \mapsto -1+2x$ le sont ; ou encore f est continue comme toute fonction polynômiale), on peut lui appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : puisque $0 \in]-1,1[$, il existe $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
   (c) On a $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} - (1-\alpha_n)^2$, sachant que par construction $\alpha_n^n - (1-\alpha_n)^2 = 0$, d'où $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} - \alpha_n^n$. Ce nombre est négatif puisque α_n est dans l'intervalle $]0,1[$.
2.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a $f_{n+1}(\alpha_n) \leq 0 = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ (cette égalité provenant juste de la définition de α_{n+1}). Comme f_{n+1} est croissante, et même strictement croissante sur $]0,1[$, on en déduit que nécessairement $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$. Par suite, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (b) La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1. Elle est donc convergente vers $\alpha := \sup\{\alpha_n\,;\ n \in \mathbb{N}^*\}$.
   (c) Supposons que $\alpha < 1$.
      i. Alors on a, puisque $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, $0 < \alpha_n \leq \alpha < 1$, et donc $0 < \alpha_n^n \leq \alpha^n$, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\alpha < 1$, α^n tend vers 0, et par le théorème des gendarmes, on en déduit que α_n^n tend vers 0.
      ii. Comme $f_n(\alpha_n) = 0 = \alpha_n^n - (1-\alpha_n)^2$, en passant à la limite on obtient $(1-\alpha)^2 = 0$. Ceci contredit l'hypothèse de départ $\alpha < 1$.
   (d) D'après ce qui précède, la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est inférieure ou égale à 1 (limite d'une suite d'éléments de $]0,1[$) et ne peut être strictement inférieure à 1. Donc elle est égale à 1.