Devoir maison en Math I Analyse

Exercice 1
Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il y a une borne inférieure, une borne supérieure, et si oui lesquelles.

$$\left\{ \frac{x^n}{x^n+1}\ ;\ x \in]0,+\infty[\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\left\{ \frac{x^n}{|x^n-1|}\ ;\ x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\ ,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$\left\{ \frac{x^n}{x^n+1}\ ;\ x \in]0,+\infty[\ ,\ n = E(x)+E(1/x) \right\}$$

(Ci-dessus, $E(x)$ désigne la partie entière de x.)

Exercice 2

1. Montrer que la relation de récurrence
$$u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1-u_n}\right),$$
et la donnée initiale
$$u_0 = \frac{1}{5}$$
permettent de définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels appartenant à l'intervalle $]0,1[$.
2. Montrer que cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les trois suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$v_n = u_{2n}\,, \quad w_n = u_{2n+1}\,, \quad x_n = u_{3n}\,, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,,$$

convergent.

1. Montrer (en utilisant la notion de suite extraite) que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite.
2. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite.
3. Peut-on en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ? (On justifiera la réponse.)

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |\sin(x) - \sin(y)|.$$

1. Montrer que f est 2π-périodique (c'est-à-dire que $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et calculer $f'(\frac{\pi}{2})$.

Exercice 5
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = x^n - (1 - x)^2.$$

1. Dans cette question, l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.
   (a) La **fonction** f_n est-elle monotone ?
   (b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
   (c) Quel est le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$?
2. On considère maintenant la **suite** de terme général α_n.
   (a) Montrer à l'aide de la question précédente que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On notera $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$.
   (c) Supposons que $\alpha < 1$.
      i. Montrer qu'alors α_n^n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
      ii. A l'aide de la relation $f_n(\alpha_n) = 0$, en déduire que $(1 - \alpha)^2 = 0$
   (d) Conclure.